[illegible]

—— [illegible] ——

[illegible]

[illegible]

ISBN [illegible]

[illegible]

[illegible] 11.50 [illegible]

[illegible]

现代数学译丛

常微分方程续论

——常微分方程的几何方法——

〔苏〕B. И. 阿诺尔德 著

齐民友 译

科学出版社

1989

内 容 简 介

这是一部把常微分方程和近代动力系统与分枝理论相结合的著作.

本书第一章用 Lie 群的观点研究微分方程求解问题，并用最新观点详细介绍较经典的理论；以后几章着重讨论非常重要的结构稳定性及摄动理论. 最后一章介绍微分方程的分枝理论. 本书所涉及的都是当前世界上在这一领域中最引人注目的问题.

本书可作为高等院校高年级学生和研究生教材，也可作为有关科技工作者的参考书.

В. И. Арнольд

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Наука, Москва, 1978

现代数学译丛

常微分方程续论

——常微分方程的几何方法——

〔苏〕В. И. 阿诺尔德 著

齐民友 译

责任编辑 石小龙 吕 虹

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989 年11月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1989 年11月第一次印刷 印张：11

印数：0001—1 920 字数：286 000

ISBN 7-03-001230-5/O·272

定 价：11.20 元

序

Newton 的基本发现，他本人认为需要保密，所以只用字谜似的形式发表，这就是：Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa. 用现代数学语言来说，它的意思就是："解微分方程是有用处的."

现时，微分方程理论是许许多多性质各异的思想和方法的广泛的汇集，这些思想和方法在许多应用中行之有效，而且不断地促进着数学各分支的理论探讨.

把抽象的数学理论和自然科学的应用连结起来，大部分都借助于微分方程. 微分方程的许多部分发展得这么快，以致它已经成为一门独立的学科；对于许多学科，例如线性代数，Lie 群理论，泛函分析和量子力学等等，微分方程的问题对它们的发源有很重大的意义. 所以微分方程是自然科学数学观的基础.

在选择本书的材料时，作者想着重选取对研究微分方程有用的基本思想和方法. 特别着力使基本思想不受技巧细节之累，这些基本思想照例是既简单又直观的. 对最基本而简单的问题，本书论述得最仔细；而对比较专门和困难的理论，我们则进行了综述.

本书从可用求积法解出的一些特殊方程讲起. 重点不在于把初等积分法作形式的药方似的罗列，而在于一方面把它们与一般的数学思想、方法和概念(奇点的分解，Lie 群，牛顿图式等)结合起来，另一方面把它们与在自然科学中的应用联结起来.

一阶偏微分方程是用函数的一阶节 (jet) 之流形上自然接触构造来讲的，同时也顺带论述了所需要的接触构造几何学的初步. 这样，整个理论可以不再需要其它资料.

本书很大一部分是关于通常所谓的定性方法. 由 Poincaré 所开创的微分方程定性理论的最新发展使人们认识到，正如微分

方程的显示求积一般是不可能的一样，对高维相空间的一般微分方程的定性研究也是不可能的。本书从结构稳定性的观点讨论微分方程的分析．结构稳定性是指在微分方程的微小变动之下，其定性的图象的稳定性．这里叙述了自 A. A. Андронов 和 Л. С. Понтрягин 在这个领域的最初的工作发表以来所得到的基本结果，即 Аносов 的结构稳定 У-系统(Аносов 系统)理论的初步，这个系统的一切轨道都是结构不稳定的．还叙述了 Smale 关于结构稳定系统集合不稠密性的定理．同时讨论了这些数学发现在应用上的价值(这里说的是描述运动的稳定的混沌状态，诸如湍流那样)．

各种渐近方法是研究微分方程的最有力（也是最常用）的方法．本书讨论了平均法的基本思想，这个方法可追溯到天体力学的奠基性的工作，而且在一切需要把缓慢的演化与急速的振荡区分开来的应用领域中都广泛地予以应用(见 H. H. Боголюбов 和 Ю. A. Митропольский 等人的工作)。

尽管对于平均法已经作了大量的研究，但在演化问题(甚至对最简单的多频系统)中，远非一切都已清楚了．本书试图通过对共振以及共振的俘获进行考察以说明这些问题。

平均法的基本思想是通过选用适当的坐标系以消除摄动这一思想。这个思想也是 Poincaré 标准形理论的基础。标准形方法是微分方程局部理论的基本方法，这个理论描述相曲线在奇点或封闭相曲线附近的性态。本书讲了 Poincaré 标准形方法的基础，其中包括 Siegel 关于全纯映射线性化的基本定理的证明。

Poincaré 标准化方法不仅对研究个别的微分方程有重要的应用，而且在分枝理论中也是如此．这里，研究的对象是含有参数的一族方程。

分枝理论研究系统所含的参数变动时定性图象的变化．对参数的一般值，我们通常会遇到通有的[1]系统(例如所有奇点都是简

---

1) “通有的”是 generic 一词的试译，书中似未用到其准确数学含义．关于这点可以参看 M. Golubitsky and V. Guillemin [1]．在 Arnold [13] 中则将它概括为：generic 即“所有情况，但有某些例外” (p. 3)．——译者注

单的等等)．然而，若系统含有参数，则对参数的某些值不可避免地会遇到蜕化(例如向量场的两个奇点的融合)．

在单参数系统中，我们通常只遇到简单的蜕化(即在系统的小扰动下不可避免的蜕化)． 这样就产生了在一切系统的泛函空间中按相应曲面的余维数把蜕化分为层次 (hierarchy): 在单参数的通有系统中，只有相应于余维数为 1 的曲面的蜕化，等等．

近年来，由于应用了 Whitney 的可微分映射的奇点的一般理论的思想和方法，分枝理论取得了可观的进展．

本书最后一章论述分枝理论，其中应用了以前各章中所建立的方法，讲述了这一领域自 Poincaré 和 Андронов 的奠基性工作以来的主要结果．

在讨论这些主题时，作者力图避免公理-演绎的风格，这种风格的特点就是引进定义时不给出它的来龙去脉，而且掩盖基本思想和方法．我们应该把它们作为一种比喻，对学生讲讲，而不写上书本．

数学的公理化和代数化，为时已超过 50 年．正如人们所说的，它们已经使得许许多多的数学教本令人无法读懂了，而且它们使数学与物理和自然科学的完全脱节成为现实．作者打算这样来写这本书，使它不但对数学家有用，而且对所有要用微分方程理论的人都能有用．

对于本书读者，我们只假设他们具有很少的一般数学知识，大体上相当于大学一、二年级的水平，例如读过作者关于微分方程的教本 (В. И. Арнольд [8]) 就已经够了(但并非必要)[1]．

本书在内容上略去了读者感到困难的地方，这对理解后文并无大害，我们采取了一些措施以尽量避免各章甚至各节间互相引用．

书中内容有些是作者在莫斯科大学 1970—1976 年间所开设

---

1) 在讲某些特殊问题时，要用到或提到关于微分形式，Lie 群和复变函数的最初步的知识．但为了理解本书绝大部分内容，这些知识不是必备的．

的许多必修课或专业课的材料；这些课程是为二至三年级大学生、数学系的进修生以及从事自然科学方面的应用的数学家的试验班开设的。

（下略）

B. Арнольд

1977年6月

记　　号

$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{C}$	复数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{R}^n$	n 维实线性空间
$\exists$	存在
$\forall$	对于一切
$a\in A$	集 A 的元素 a
$A\subset B$	集 B 的子集 A
$A\cap B$	集 A 和 B 的交
$A\cup B$	集 A 和 B 的并
$A\setminus B$	集 A 和 B 的差（A 中 B 外的部分）
$A\times B$	集 A 和 B 的直积（元素对（a, b）$a\in A$, $b\in B$ 之集）
$A\oplus B$	线性空间的直和
$f: A\to B$	A 到 B 内的映射
$x\longmapsto y$ 或 $y=f(x)$	映射 f 映元素 x 为元素 y
$\mathrm{Im}f$ 或 $f(A)$	映射 f 的象（但 $\mathrm{Im}z$ 表 z 之虚部）
$f^{-1}(y)$	点 y 在映射 f 下的完全原象（使 $f(x)=y$ 的元素 x 之集）
$\mathrm{Ker}f$	线性算子 f 的核（零的完全原象）
$\dot{f}$	函数 f 的变化率（对时间 t 的导数）
f', f_*, df/dx, Df/Dx	映射 f 的导映射
T_xM	流形 M 在 x 点的切空间
$A\Rightarrow B$	由命题 A 可得命题 B
$A\Longleftrightarrow B$	命题 A 与 B 等价

$\omega_1 \wedge \omega_2$	微分形式 ω_1 与 ω_2 的外积
$f \circ g$	映射的复合 $((f\circ g)(x) = f(g(x)))$
◀, ▶	证明的始与末
$L_v f$	函数 f 沿向量场 v 方向的导数

设 $(x_1, \cdots, x_n)$ 为坐标函数。向量 v 可由其分量 $v_1, \cdots, v_n$ 给出。沿 v 方向的导数是

$$L_v f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

在固定坐标系 $(x_1, \cdots, x_n)$ 以后，将采用以下记号：

x_k——向量的一个函数，即其第 k 个分量。

$\frac{\partial}{\partial x_k}$——一个向量场，其第 k 个分量为 1，其余分量为 0。

微分方程 $\dot{x} = v(x)$ 右方的定义域称为相空间，点 x 称为相点，向量 $v(x)$ 称为相速度向量，v 称为相速度向量场。若 $x = \varphi(t)$ 是方程的解，映射 φ 之象称为相曲线，其图象称为积分曲线。

微分方程 $\dot{x} = v(x, t)$ 右方的定义域称为扩充相空间；v 在扩充相空间中给出一个方向场；若 $x = \varphi(t)$ 是解，映射 φ 的图象就称为积分曲线。

目　　录

序 …… iii
记号 …… vii
第一章　特殊方程 …… 1
§1.　关于对称群不变的微分方程 …… 1
§2.　微分方程奇点的分解 …… 8
§3.　隐方程 …… 14
§4.　隐方程在正则奇点附近的标准形 …… 24
§5.　定态 Schrödinger 方程 …… 30
§6.　二阶微分方程的几何学与三维空间中一对方向场的几何学 42
第二章　一阶偏微分方程 …… 59
§7.　一阶线性与拟线性偏微分方程 …… 59
§8.　一阶非线性偏微分方程 …… 67
§9.　Frobenius 定理 …… 83
第三章　结构稳定性 …… 86
§10.　结构稳定性的概念 …… 86
§11.　环面上的微分方程 …… 94
§12.　圆周上的解析微分同胚解析化约为旋转 …… 111
§13.　双曲理论初步 …… 119
§14.　Y-系统 …… 126
§15.　结构稳定系统并非处处稠密 …… 139
第四章　摄动理论 …… 142
§16.　平均法 …… 142
§17.　单频率系统的平均化 …… 147
§18.　多频率系统的平均化 …… 15
§19.　Hamilton 系统的平均化 …… 161
§20.　绝热不变量 …… 165
§21.　Seifert 叶层构造中的平均化 …… 169

第五章　标准形式 …… 176
§22. 形式地化为线性标准形式 …… 176
§23. 共振情况 …… 179
§24. Poincaré 域和 Siegel 域 …… 183
§25. 映射在不动点附近的标准形式 …… 187
§26. 周期系数方程的标准形式 …… 190
§27. 椭圆曲线附近的标准形式 …… 197
§28. Siegel 定理的证明 …… 210
第六章　分枝的局部理论 …… 219
§29. 族与形变 …… 219
§30. 依赖于参数的矩阵和减量图的奇性 …… 234
§31. 向量场的奇点的分枝 …… 257
§32. 相图的逼有形变 …… 261
§33. 平衡位置的失稳 …… 266
§34. 自振动的失稳 …… 281
§35. 平面上等度变化向量场的逼有形变 …… 291
§36. 共振时拓扑的形态变化 …… 312
§37. 奇点的分类 …… 326
考试例题 …… 331
参考文献 …… 334

第一章　特殊方程

在研究微分方程时应用数学各分支的方法．本章中讨论了个别的特殊方程和特殊的方程类型．一方面特别注意所考虑的方程在应用上的意义，另一方面则注意它们与其他的一般数学问题（例如奇点的分解，Newton 图式，对称性的 Lie 群等等）的联系．本章以一维定常 Schrödinger 方程的理论和二阶非线性方程的几何理论作为结束．

§1.　关于对称群不变的微分方程

本节介绍一些一般的思想，以显式积出微分方程的方法就是以它们为基础的．作为一个例子，我们将讨论相似性理论，即齐次方程和准齐次方程的理论．

A.　微分方程的对称性的群

考虑相空间 U 中的向量场 v．

定义　　若微分同胚 $g:U\to U$ 将向量场 v 变为自身，即

$$v(gx)=g_{*x}v(x),$$

则称 g 为**向量场 v 的对称性**．

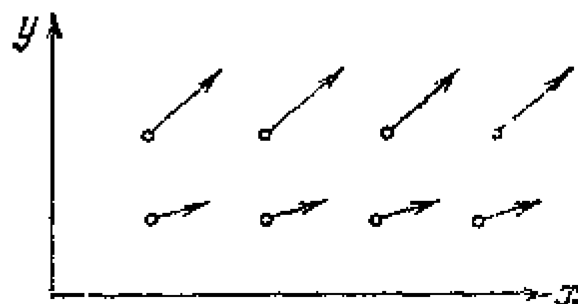


图 1

这时也就说 v 关于微分同胚 g 是*不变的*。

例1 若坐标为 (x,y) 的平面上的向量场的分量不依赖于 x，则它关于 x 轴的平移不变(图1)。

例2 Euclid 平面 (x,y) 上的向量场 $x\partial_x+y\partial_y$ 关于伸缩 $g(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$ 和旋转都是不变的。

给定向量场的所有对称性构成群。

问题 求坐标为 (x,y) 的平面上之向量场 $x\partial_x+y\partial_y$ 的对称群。

考虑扩充相空间中的方向场。

定义 若扩充相空间的微分同胚把一个方向场变为其自身，则称之为该方向场的*对称性*。这时，就说方向场关于此微分同胚为*不变的*。

例1 方程 $\dot{x}=v(x)$ 的方向场关于 t 轴的平移是不变的(图2 a)。

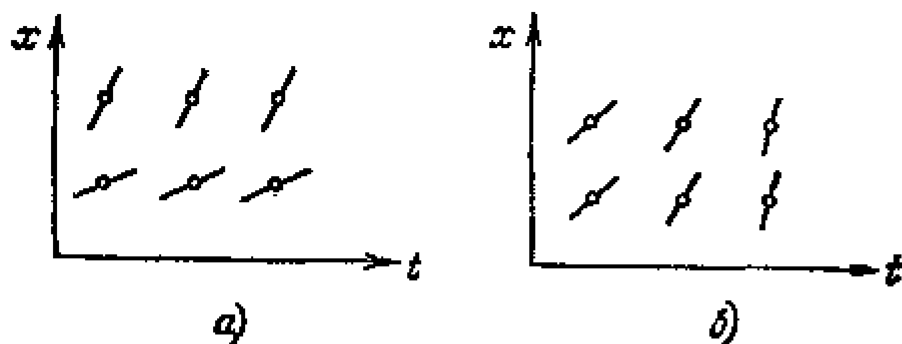


图 2

例2 方程 $\dot{x}=v(t)$ 的方向场关于 x 轴的平移是不变的(图2б)。

定义 微分方程 $\dot{x}=v(x)$ (或 $\dot{x}=v(x,t)$) 称为对相空间(或扩充相空间)的微分同胚 g 为*不变的*，如果向量场 v (或方向场 v) 对此微分同胚 g 不变；这时微分同胚 g 称为此方程的*对称性*。

定理 方程的对称性变此方程的相曲线(或积分曲线)仍为它的相曲线(或积分曲线)。

◀设 $x=\varphi(t)$ 是方程 $\dot{x}=v(x)$ 的解而 g 为对称性。这时 $x=g(\varphi(t))$ 仍然是解，所以对称性 g 变相曲线为相曲线。对积分曲线证明亦类似。▶

例　方程 $\dot{x}=v(t)$ 的积分曲线族在沿 x 轴的平移下仍变为它的积分曲线族。方程 $\dot{x}=v(x)$ 则沿 t 轴的平移也如此。

以下的例子时常会在应用中遇到，不过称为"相似理论"、"量纲理论"或"考察自模性"。

B. 齐次方程

定义　如果在除去 O 点的平面上的方向场对一切伸缩

$$g^{\lambda}(x, y)=(e^{\lambda}x, e^{\lambda}y),\ \lambda\in\mathbf{R}$$

都不变，就称它是**齐次的**。

如果微分方程 $\frac{dy}{dx}=v(x, y)$ 的方向场是齐次的，就称它为**齐次方程**（图3）。

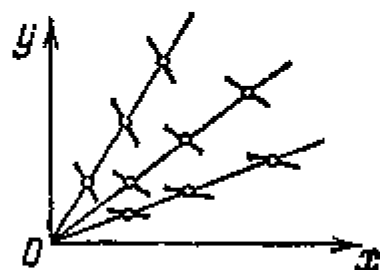


图 3

换言之，这就是说，在每一条由原点发出的射线之各点上，场的方向都应为平行的：

$$v(e^{\lambda}x, e^{\lambda}y)\equiv v(x, y).$$

例　若有实数 d 使函数 f 适合 $f(e^{\lambda}x, e^{\lambda}y)=e^{\lambda d}f(x, y)$，我们就称 f 为 d 次齐次的。当 d 为非负整数时，任意的 d 次型（型即齐次多项式）就是例子。令 P 与 Q 为 x 和 y 的两个 d 次型。微分方程

$$\dot{x}=P,\ \dot{y}=Q$$

是平面上的向量场。在区域 $P\neq 0$ 中相应的方向场就是齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P}\quad\left(\text{例如 }\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy},\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\text{ 等等}\right)$$

的方向场。

注　齐次场的定义域并不一定是除去 O 点的整个平面—可以在任意齐次域（即对伸缩不变的区域）里，例如在以 O 为顶点的角域等区域中考虑齐次场。

定理　齐次方程的积分曲线在伸缩 g^{λ} 的作用下仍为同方程的积分曲线。

于是，在研究齐次方程时，只需在平面的每一个以 O 为顶点的

角域中考虑一条积分曲线就够了。

直接应用§1中A的定理即可得到证明。



图 4

问题 令 P, Q 为 d 次型，证明方程组 $\dot{x}=P$, $\dot{y}=Q$ 的相曲线可以用伸缩互相得出。

若这些相曲线有某一个是可在时间 T 内绕行的闭曲线，则在伸缩 g^λ 之下可由它得出迴转周期为 $T/e^{\lambda(d-1)}$ 的封闭相曲线。

C. 准齐次方程与量纲的比较

固定实数 α 与 β 并考虑平面上的一族在不同方向上倍数不同的伸缩

$$g^s(x, y) = (e^{\alpha s}x, e^{\beta s}y). \tag{1}$$

注意，公式(1)给出了平面上的线性变换的单参数群(图5)。

定义 函数 f 称为 d 次准齐次的，如果对(1)中的 g^s 有

$$f(g^s(x, y)) = e^{ds}f(x, y).$$

例 若 $\alpha=\beta=1$，即得通常的 d 次齐次函数。

准齐次函数相乘时，其次数相加。次数也称为权。因此(1)中 x 的权为 α，y 的权为 β，x^2y 权为 $2\alpha+\beta$。所有固定次数的准齐次单项式可以很容易地由以下的牛顿图式(图6)看出：用非负整数网格象限中的 (p, q) 点表示单项式 x^py^q。这样，所有 d 次单项式的次数即指数 (p, q) 平面上第一象限中方程为 $d=\alpha p+\beta q$ 的线段上的整点。

问题 选择 x 和 y 的权使 x^5+xy^3 为准齐次的。

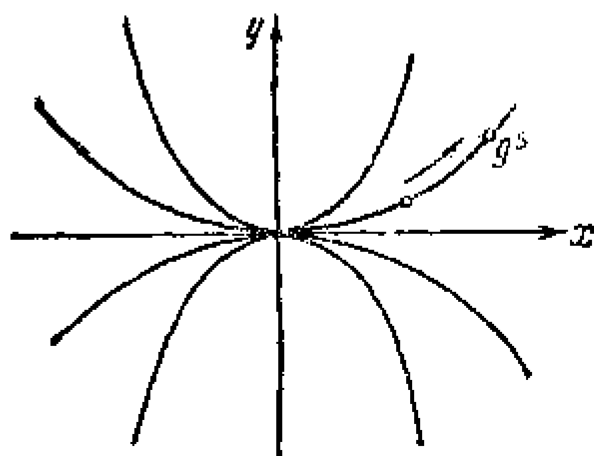


图 5

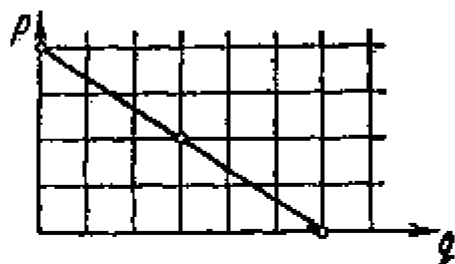


图 6

定义 若微分方程 $\frac{dy}{dx} = v(x, y)$ 的方向场 v 对伸缩 (1) 是不变的，就称此方程为（权 (α, β) 的）准齐次方程。

由 §1 中 A 关于对称性的一般定理可得

定理 可以在伸缩 (1) 的作用下求得准齐次方程的积分曲线。

问题 求证函数 $v(x, y)$ 给出（权为 (α, β) 的）准齐次微分方程，当且仅当它是 $d = \beta - \alpha$ 次准齐次的。

注 以上定义和定理很容易推广到多于两个变量的情况以及阶数高于 1 的微分方程的情况。特别地，容易证明

定理 设在 (x, y) 平面上有曲线 γ: $y = y(x)$，且在其上点 (x_0, y_0) 处有 $\frac{d^k y}{dx^k} = F$。在曲线 $g^s\gamma$ 的相应点上有

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{(\beta - k\alpha)s}F.$$

换言之在变换 (1) 之下，$\frac{d^k y}{dx^k}$ 也和 y/x^k 一样变换，这也说明了记号 $\frac{d^k y}{dx^k}$ 的方便之处。

问题 设在 d 次齐次力场中质点以时间 T 走过轨道 Γ，求证这一质点通过位似的轨道 N 需要时间

$$T' = \lambda^{(1-d)/2}T.$$

解 牛顿方程 $\frac{d^2x}{dt^2}=F(x)$ 中若 F 是 d 次齐次，则它在适当的变换(1)之下仍变为自身. 亦即，取 x 的权为 α，t 的权为 β 且 $\alpha-2\beta=\alpha d$ 即可. 因此 $\beta=\frac{1-d}{2}\alpha$. 所以伸缩 $x'=\lambda x$ 相应于 $T'=\lambda^{(1-d)/2}T$.

问题 求证 Kepler 第三定律：在万有引力场中通过位似轨道所需时间，平方正比于轨道线性度量的立方.

解 在前问题之解中，取 $d=-2$（万有引力定律），即得 $T'=\lambda^{3/2}T$.

问题 若振动的恢复力正比于伸长(线性振子)或正比于伸长的立方(弱力)，振动周期如何依赖于振幅？

答 线性摆的周期不依赖于振幅，弱力情况下则反比于振幅.

问题 众所周知，具有铅直轴的陀螺有临界角速度：若陀螺之角速度大于此临界值，陀螺将稳定地直立，若小于则将倾倒.

若将陀螺放在月球上，从而重力为地面上重力的 $\frac{1}{6}$，临界角速度将如何变化？

答 将以因子 $\sqrt{6}$ 减小.

D. 单参数对称群对降阶的应用

定理 对 $\mathbb{R}^n$ 中的方向场，若已知一个单参数对称群，则相应微分方程的求积问题可化为求积一个 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的微分方程问题. 特别地，对平面上的方向场，若已知一个单参数对称群，则相应的方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 可以显式地积出.

◀设 $\{g^s\}$ 是所给的对称群. 考虑流 $\{g^s\}$ 的轨道 $\{g^s x\}$，至少可以局部地确定 $(n-1)$- 维的轨道空间(即作用 g^s 的商空间)以及由原空间到商空间的映射 p (p 将流 $\{g^s\}$ 的每个轨道映为一点). 结果原来的方向场在映射 p 之下变为 $(n-1)$- 维轨道空间中的新方向场；只需对它求积即可.▶

更准确地说，考虑某点 $x_0\in\mathbb{R}^n$；设对称群 $\{g^s\}$ 过 x_0 的轨道是曲线 σ. 过 x_0 点作一个横截于 σ 的 $(n-1)$- 维流形 Σ. 在 x_0 点附近引入局部坐标 (s,u) 使 $s\in R, u\in\Sigma$ 对应于原空间的 $g^s u$ 点. 于是到轨道空间的投影 p 和

对称群的作用由公式

$$p(s, u) = u, \quad g^{s_1}(s_2, u) = (s_1 + s_2, u)$$

给出(从而 Σ 上的点将轨道局部参数化)。

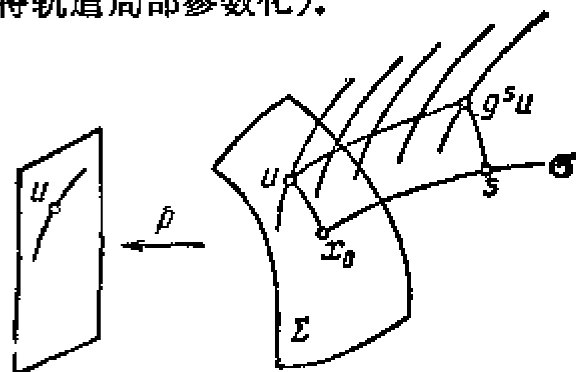


图 7

注意，若显示地给出群 g^s，则也可显式地求出坐标 (s, u)。将原来的微分方程在这些坐标中写出。若在 x_0 点的方向场不切于 Σ（适当选取 Σ 就可以做到这一点），则在此点附近方程可以写为

$$\frac{du}{ds} = v(s, u).$$

这时群 $\{g^s\}$ 就成为沿 s 轴的平移群，所以函数 v 不含 s. Σ 上的向量场 $v(u)$ 在这个 $(n-1)$-维流形上定义了一个方向场；知道它的积分曲线后即可用求积法解出方程 $\frac{du}{ds} = v(u)$，即得出原方程的积分曲线。

特别是在 $n = 2$ 的情况下，选定了坐标 (s, u) 就立即可将它转化成可求积的方程 $\frac{du}{ds} = v(u)$.

注 在实践中选取 s 的适当函数 z 代替 s 更为方便. 在这样的坐标之下，具有对称群 $\{g^s\}$ 的方程可写为

$$\frac{du}{dz} = v(u)f(z).$$

在 $n = 2$ 时，这是可分离变量的方程。

例如，齐次方程可以在极坐标系中，也可以在坐标系 $u = y/x$, $z = x$（图 8 a）中，化为可分离变量的方程。

这里 $\{g^s\}$ 就是倍数为 e^s 的伸缩的群；对于极坐标，Σ 是圆 $x^2 + y^2 = 1$，而对第二个坐标系则是直线 $x = 1$; $z = e^s$.

问题 在什么坐标系中可以显式积出准齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = v(x, y)?$$

这里 x 的权为 α，y 的权为 β（因此 v 是 $\beta-\alpha$ 次准齐次方程）.

解　可以令 $u=y^\alpha/x^\beta$，$x=x$（在 $x\neq 0$ 处）(图 8б).

问题　显式地写出上题的方程在 (x, u) 坐标中所化成的可分离变量的方程.

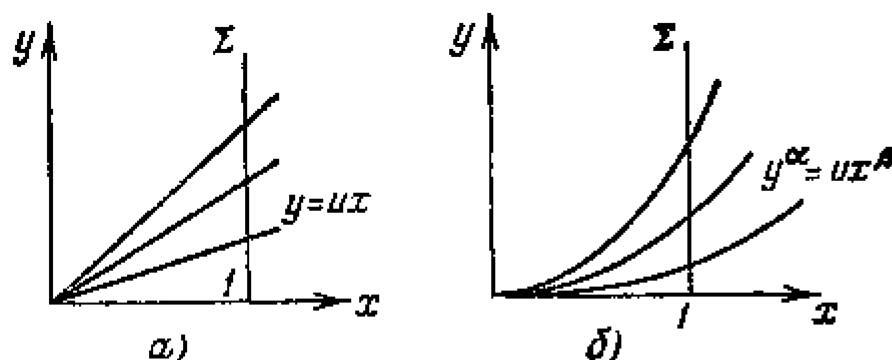


图 8

解　$y^\alpha = ux^\beta$，所以 $\alpha y^{\alpha-1}dy = x^\beta du + \beta u x^{\beta-1}dx$. 因为 $dy = v dx$，故 $\alpha y^{\alpha-1} v dx = x^\beta du + \beta u x^{\beta-1} dx$，即

$$\frac{du}{dx} = \frac{\alpha y^{\alpha-1} v - \beta u x^{\beta-1}}{x^\beta},$$

但 $v(x, y) = x^{(\beta/\alpha)-1} w(u)$，所以

$$\frac{du}{dx} = \frac{\alpha w_1(u) - \beta u}{x}, \quad w_1(u) = u^{-\frac{1}{\alpha}} w(u).$$

§ 2.　微分方程奇点的分解

这里要简要地讲述一个重要而常用的数学方法，即奇点的分解或爆破（blow up）（亦称为 σ- 过程）.

A.　σ- 过程

在非奇点附近，所有向量场的构造都是简单的，而且也是相同的.

为了在奇点附近研究各种数学对象的细微结构，我们制订了一个特别的工具，它好像显微镜一样，有很高的分辨力，这就是所谓**奇点的分解**. 从解析观点看来，就是选择这样的坐标系，使得在

奇点附近很小的位移相应于坐标的很大的变化.

极坐标就已经具有这样的性质，但是变换为极坐标需要超越函数(三角函数)，所以从代数观点看另一种程序更为方便，这就是σ-过程，或称为奇点的膨胀.

先从一个辅助的构造开始. 令 $p: \mathbf{R}^2\backslash O \to \mathbf{R}P^1$ 是定义射影直线的纤维化(射影直线是一个流形，其中的点是平面上过坐标原点的直线. 映射 p 将平面上的点映为联结该点与原点的直线).

考虑映射 p 的图象 Γ，它是直积 $(\mathbf{R}^2\backslash O)\times \mathbf{R}P^1$ 中的光滑曲面(图 9). 将除去一点的平面嵌入平面中，即可视 Γ 为直积 $\mathbf{R}^2\times \mathbf{R}P^1$ 中的光滑曲面. 自然投影 $\pi_1: \mathbf{R}^2\times \mathbf{R}P^1 \to \mathbf{R}^2$ 可把 Γ 微分同胚地映到除去一点的平面 $\mathbf{R}^2\backslash O$ 上(为了更直观地想象它，我们把 Γ 看成一个螺旋楼梯是有好处的；整体看来，射影直线微分同胚于圆周 S^1，直积 $\mathbf{R}^2\times \mathbf{R}P^1$ 则微分同胚于环面的内域).

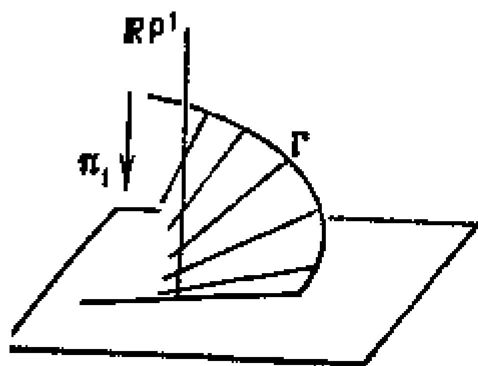


图 9

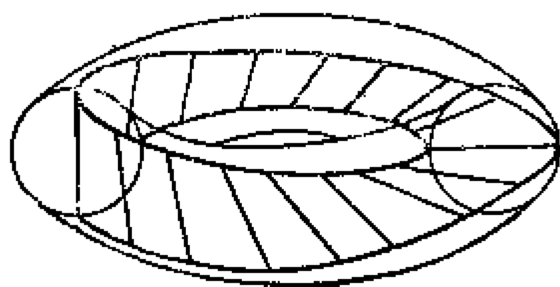


图 10

定理 映射 p 在 $\mathbf{R}^2\times \mathbf{R}P^1$ 中的闭包是光滑曲面 $\Gamma_1 = \Gamma\cup(O\times \mathbf{R}P^1)$. 曲面 Γ_1 微分同胚于 Möbius 带(图 10).

◀设 (x, y) 是平面上的坐标，$u = y/x$ 是 $\mathbf{R}P^1$ 中的局部仿射坐标. 于是 (x, y, u) 是 $\mathbf{R}^2\times \mathbf{R}P^1$ 中的局部坐标系. 在此坐标系下，Γ 由方程 $y = ux$, $x\neq 0$ 给出，而 Γ_1 则由局部方程 $y = ux$ 给出. 这是一个光滑曲面；Γ 的被坐标系覆盖的部分加上射影直线 $O\times \mathbf{R}P^1$ 的落到其上的部分，我们就得到了 Γ_1.

只要考虑第二个局部坐标系 (x, y, v)，$x = vy$ 即可证明 Γ_1 的光滑性.

投影 $\pi_2: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}P^1 \to \mathbf{R}P^1$ 将Γ分层为直线。若绕圆 $\mathbf{R}P^1$ 一周，相应的$\mathbf{R}^2$中的直线转过角π。由此可知Γ_1是 Möbius 带。▶

定义 由$\mathbf{R}^2$变到Γ_1称为以O为心的σ-过程或点O爆破(blow up)为射影直线(或圆)$O \times \mathbf{R}P^1$。映射 $\pi_1: \Gamma_1 \to \mathbf{R}^2$ 称为反σ-过程或称为从$O \times \mathbf{R}P^1$到点O的坍塌。

映射 $\pi_1: \Gamma_1 \to \mathbf{R}^2$ 限制到Γ上乃是一个到除去一点的平面的微分同胚。因此，在O点有奇点的平面上的一切几何对象都被转移到Γ_1上。这时奇点可能被化简或"分解"。

例 考虑过点O的三条直线。它们在Γ_1上相应于交$\mathbf{R}P^1$于三个不同点的三条直线(图11)。

问题 考虑在O点n阶相切的两条曲线(例如$y=0$和$y=x^2$，$n=2$)，证明它们在Γ_1上相应于两条在O_1点处$n-1$阶相切的曲线(图12)。

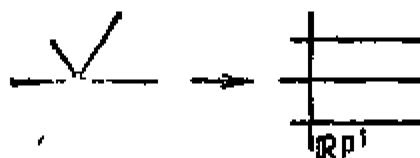


图 11

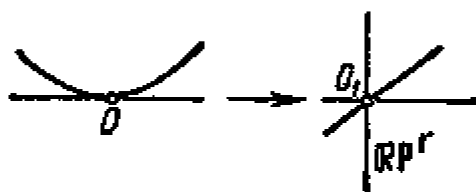


图 12

若经过σ-过程奇点仍不能变成斜截地相交，则可以对新得到的奇点再作σ-过程，直到化为斜截地相交为止。可以证明，一切代数曲线的奇点经过有限多这样的步骤以后都可以分解(即化为斜截相交)。

问题 分解曲线 $x^2 = y^3$ 的奇点。

答 见图13。

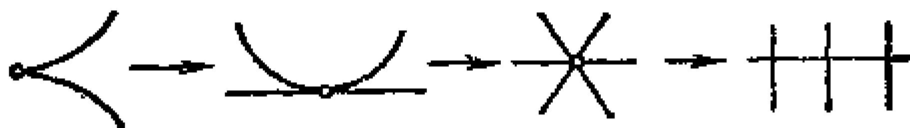


图 13

B. 分解公式

在实践上，σ- 过程就是由 (x, y) 坐标当 $x \neq 0$ 时变为坐标 $(x, u = y/x)$，而当 $y \neq 0$ 时变为坐标 $(v = x/y, y)$（图 14）. 现在我们来看这时由 (x, y) 平面的向量场所给的微分方程将怎样变化. 我们假设点 O 是此向量场的奇点.

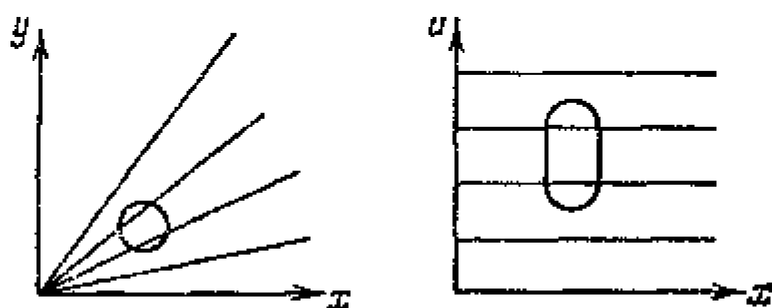


图 14

定理 具有奇点 O 的光滑向量场 w 经过 σ-过程将变为 Γ 上的向量场而且可以延拓为 Γ_1 上的光滑向量场.

◀设向量场 w 给出方程 $\dot{x} = P(x, y)$，$\dot{y} = Q(x, y)$. 在坐标 $(x, u = y/x)$ 下，可得

$$\dot{x} = P(x, ux),$$
$$\dot{u} = [Q(x, ux) - uP(x, ux)]/x.$$

因为 $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$，所以右方是光滑的. 在第二个坐标系 $(v = x/y, y)$ 中也可得到光滑场. ▶

注 所得的向量场可能在某 σ-过程中在整个扩充直线 $\mathbf{R}P^1$ 上为 0. 这时，在第一个坐标系中可将向量场除以 x，而在第二个坐标系中则除以 y. 作除法不会改变向量场的方向. 因此在 Γ_1 上将出现一个有奇点的向量场，奇点位于这条扩充直线 $\mathbf{R}P^1$ 上，但没有把它充满. 在每个奇点附近，方向场仍由光滑向量场给出.

相应于原向量场在 O 点的每一个相曲线"进入方向"，在 Γ_1 的这个场中都有一个奇点，位于 σ- 过程中所得的扩充直线 $\mathbf{R}P^1$ 上.

如果这样的奇点 O_i 还不够简单，可以对它们再作 σ- 过程. 这样作下去，最终将达到这样一种情况，即场在每个奇点的线性化都至少有一个非零特征值.

在很多情况下，第一次 σ- 过程就使我们能分析奇点附近相曲线或积分曲线的性态。例如，齐次方程的积分曲线在坐标变换 $(x, y)\longmapsto(x, u=y/x)$ 下变为可分离变量方程的积分曲线。

C. 例：具有摩擦的摆的研究

现以不足道的线性方程为例来说明以上所述。具有摩擦系数 k 的摆的方程是 $\ddot{x}+k\dot{x}+x=0$。在相平面 (x, y) 上相应的方程是

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-ky-x.$$

于是我们得到齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\quad\left(k+\frac{x}{y}\right).$$

按照一般的理论，经 σ- 过程后，即在坐标系 $(x, u=y/x)$ 中，应可分离变量。事实上，$\frac{du}{dx}=-\frac{u^2+ku+1}{ux}$。再令 $\ln|x|=z$，即得

$$\frac{du}{dz}=-k-\left(u+\frac{1}{u}\right).$$

现对系数 $k>0$ 的不同值研究此方程的积分曲线。函数 $f=u+\frac{1}{u}$ 的图象是双曲线(图 15)。因此函数 $-k-f(u)$ 的图象如图 16。方程

$$\frac{du}{dz}=-k-f(u)$$

的积分曲线相应地亦可表如图 17。回到相平面 (x, y) 即得图 18。

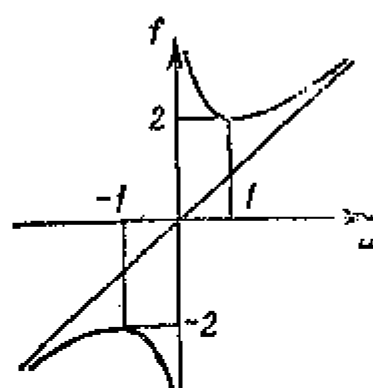


图 15

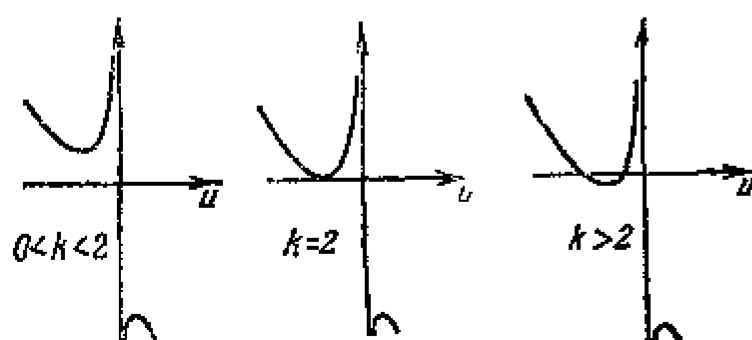


图 16

这样，当摩擦系数之值很小 $(0<k<2)$ 时，摆可以作无限次振动；而当 $k\geqslant2$ 时，摆运动的方向最多改变一次。

问题 作方程 $\dot{z}=az^n$ 与 $\dot{z}=a\bar{z}^n$ 的相曲线，$a\in\mathbb{C}$。

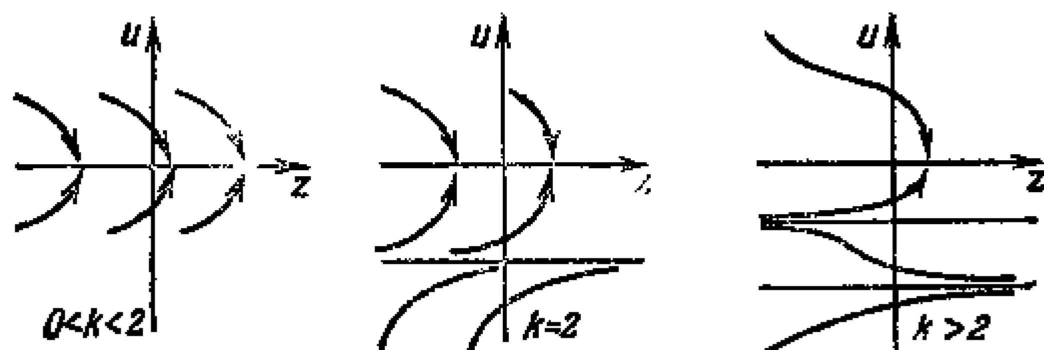


图 17

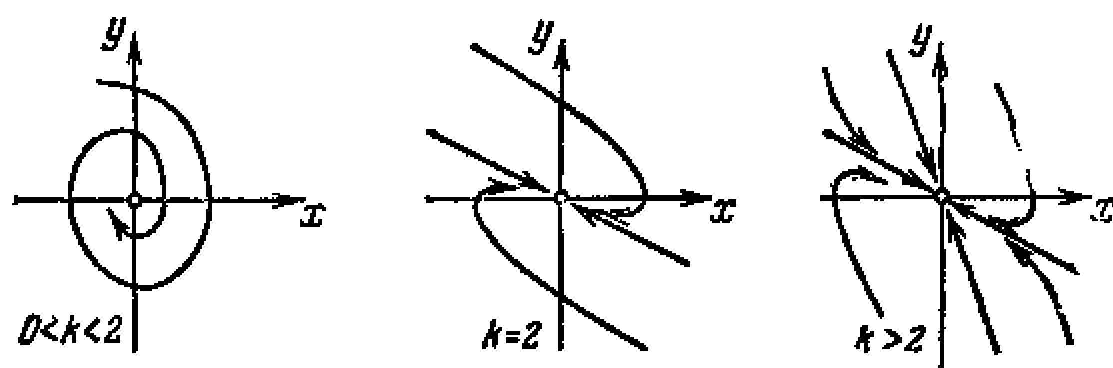


图 18

D. 例：小振动的周期

定理　设通过平衡位置 O 附近各点的相曲线都是封闭的。这时在 O 附近振动的周期当振幅趋于 0 时有等于线性化方程组振动周期的极限。

◀经 σ- 过程后，绕 O 点一周的封闭相曲线，变为 Möbius 带上绕两周后封闭的曲线。振幅趋于 0 就相当于 Möbius 带上的相曲线趋于在 σ- 过程中所得的射影直线 $\mathbb{R}P^1$ (即 Möbius 带的中线)。

由解对初值的连续依赖性定理，振动周期当振幅趋于 0 时的极限，等于 σ-过程中所得方程组之解绕扩充直线 $\mathbb{R}P^1$ 绕行周期的两倍。但沿这个直线的运动速度，无论对所给的场还是其线性化，都是一样的(见 B 段中 u 的方程)。容易验证，线性化方程的一切相曲线都是封闭的。绕过线性化方程的这些封闭曲线需时相同，因为在相速度的伸缩之下，线性化向量场仍变为自身。因此，原方程组振动周期的极限等于线性化方程组振动周期的极限，亦即等于线性化方程组振动的周期。▶

注　上面讲到的极限称为**小振动的周期**。

问题　计算摆 $\ddot{x} = -\sin x$ 在平衡位置 $x = 0$ 附近的小振动的周期。

§3. 隐 方 程

在本节中，我们将从可微映射的奇点和节[1]空间几何学的一般理论的角度来讨论导数未解出的微分方程理论的基本概念.

A. 基本定义

现讨论方程

$$F(x, y, p) = 0, \tag{1}$$

其中 $p = dy/dx$.

例 1) $p^2 = x$; 2) $p^2 = y$; 3) $y = px + p^2$.

坐标为 (x, y, p) 的三维空间称为函数 $y(x)$ 的一阶节空间(两个光滑函数 y_1, y_2 若适合 $|y_1(x) - y_2(x)| = o(|x - x_0|^k)$ 就说在 x_0 点有相同的 k 阶节；于是函数的一阶节由所选定 x_0 点，函数 y 在该点之值以及导数 p 的值而定).

方程 (1) 在节空间中给出了一个曲面. 在其上可以得出一个方向场，作法如下. 考虑节空间中的一点. 给定在该点一个向量 ξ，其分量记作 $dx(\xi)$, $dy(\xi)$ 和 $dp(\xi)$. 于是 dx, dy 和 dp 不再是神秘的所谓无穷小量，而是 ξ 的完全确定的线性函数.

在节空间的点 (x, y, p) 处，考虑由分量适合 $dy = pdx$ 的

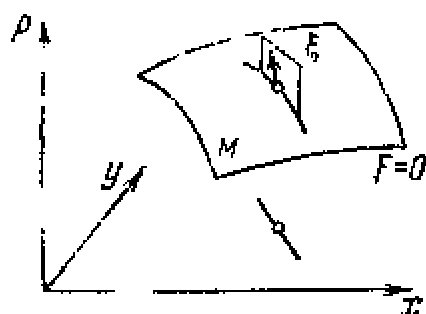


图 19

1) "节"是 jet 一词的试译. jet 基本上即指一函数之 Taylor 展开式到某一阶为止的一段而略其余项，因暂无通用译名，试译为"节"，兼取音义，以正于读者. ——译者注

向量 ξ 所组成的平面。换言之，在点 (x, y, p) 的向量 ξ，如果它在 Euclid 平面 (x, y) 上的投影以 p 为斜率，则这些 ξ 位于该平面上(图 19)。这样作出的平面称为接触平面。于是过一阶节空间的每一点有一个接触平面；所有这些平面构成一阶节空间中的一个接触平面场，或称接触构造。

问题 在一阶节空间中是否存在这样的曲面，它在其每一点上均与该点的接触平面相切?

答 否。

设在一阶节空间中由 (1) 给出的曲面是光滑的 (这并不是一个很强的限制，因为对一个通有的(generic)[1]光滑即无穷可微)函数，O 并不是临界值，从而零点集合是一个光滑流形。若所考虑的函数不是这样，则几乎对 F 的一切任意小的摄动，其零点集将成为一个光滑流形。例如对 F 加一个小常数就是这样的摄动(见 Sard 定理，§10 的 **E**)。

现在，我们在由 (1) 给出的光滑曲面 M 上考虑一个点。假设 M 在该点的切平面与接触平面不重合。这时，这两个曲面将沿一条直线相交。此外，这点附近各点的切平面与接触平面也将交于一直线，于是在 M 上该点附近得到一个方向场。

方程 (1) 的积分曲线的定义就是所得的 M 上的方向场的积分曲线。所谓解(或研究)方程 (1) 就是指解(或研究)这些曲线。M 上的积分曲线与 (1) 之解的图象(它位于 (x, y) 平面上)的关系将在下面讨论。我们要强调，M 上的积分曲线不是用 (1) 的解，而是用接触平面来定义的。

B. 正则点和判别曲线

节空间中 p 轴的方向称为铅直方向。设 M 为节空间中由 (1) 所定的光滑曲面。考虑铅直方向的投影

$$\pi: M \to \mathrm{R}^2, \quad \pi(x, y, p) = (x, y).$$

定义 曲面 M 上的点若非映射 π 的临界点，它就称为正则

1) 见序言译注。——译者注

点。

换言之，若M上某点处的切平面不是铅直的，该点就是正则点。也就是说，若到(x, y)平面的投影在该点附近是微分同胚，*则该点是正则点*。

映射π的临界值集(即临界点集的投影)称为方程(1)的**判别曲线**。

例 方程$p^2=x$的判别曲线是y轴，而方程$p^2=y$的判别曲线是x轴(图 20)。

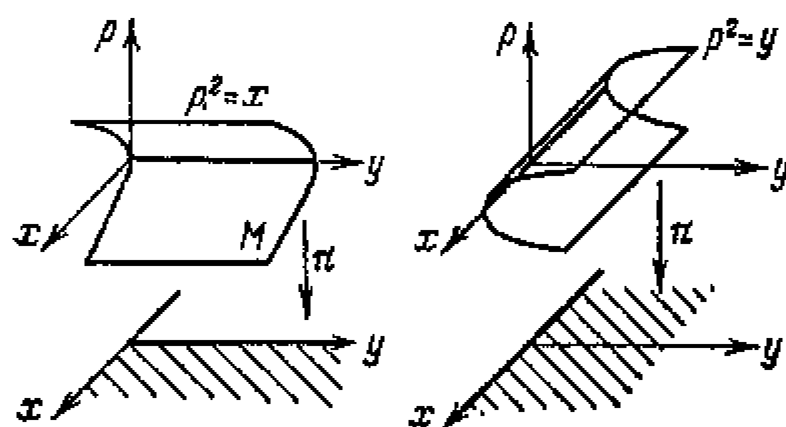


图 20

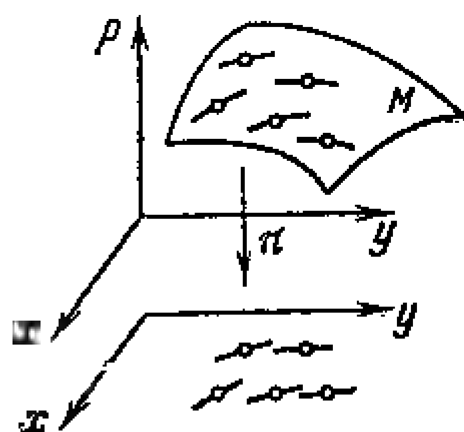


图 21

考虑曲面M上的正则点。由隐函数定理，可知M在这点附近是光滑函数$p=v(x, y)$的图象。

定理 向(x, y)平面的投影将方程(1)在M上的积分曲线在正则点附近变为方程

$$\frac{dy}{dx} = v(x, y) \tag{2}$$

在此点投影附近的积分曲线。

◀由接触平面的定义，它在 (x, y) 平面上的投影是一直线，其方向即 (2) 的方向场之方向．因此，在局部微分同胚 π 之下，方程 (1) 在 M 的所考虑的正则点附近的方向场变为方程 (2) 的方向场；从而其积分曲线也应互变．▶

注　从整体来看，方程 (1) 的积分曲线在 (x, y) 平面上的投影一般地并不是任何方向场的积分曲线．方程 (1) 的积分曲线在 (x, y) 平面上的投影在判别曲线上一般地有尖点；然而，对方程 (1) 的某些情况，这些投影在判别曲线的点上仍是光滑的．

C. 例子

例 1　$p^2 = x$ (图 22)．

曲面 M 为抛物柱面．判别曲线是 y 轴．为了求积分曲面，最好不以 x，y 而以 p，y 为坐标(前者是整体坐标系)．

现将曲面 M 的 (x, y, p) 点处的向量 ξ 之分量 dx, dy, dp 所应满足的条件以及它们属于我们的方向场的条件写出：

$$\begin{cases} p^2 = x & (\text{属于 } M); \\ 2p\,dp = dx & (\text{切于 } M); \\ dy = p\,dx & (\text{属于接触平面}). \end{cases}$$

因此，在 (p, y) 坐标下，积分曲线由条件 $dy = 2p^2dp$ 决定．

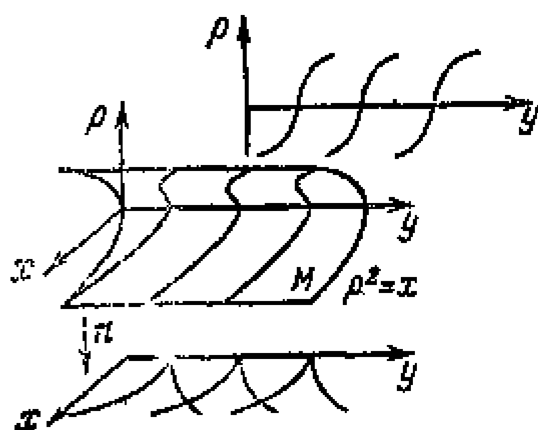


图 22

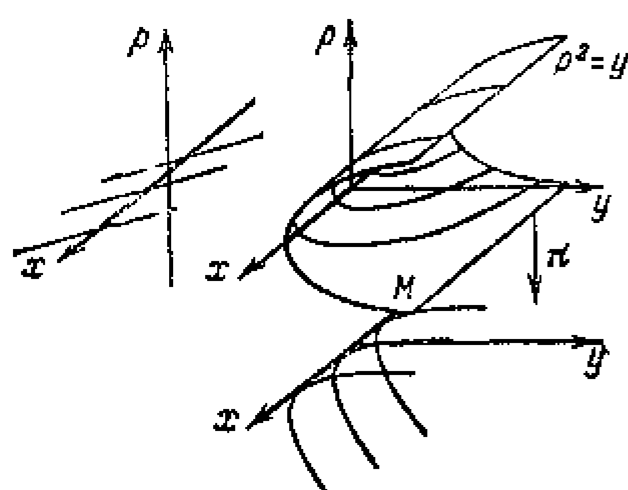


图 23

于是M上的积分曲线将由 $y+C=\frac{2}{3}p^3$ 与 $x=p^2$ 两式给出。它们在(x,y)平面上的投影是一族半立方抛物线。

例 2 $p^2=y$（图 23）。

和前例一样进行可得

$$\begin{cases}p^2=y,\\ 2pdp=dy,\\ dy=pdx.\end{cases}$$

此例中，我们在M上取x和p为坐标，将有 $p(dx-2dp)=0$，由此或有 $p=0$，$y=0$，或有

$$x=2p+C,\ y=p^2.$$

它们在(x,y)平面上的投影是切于判别曲线 $y=0$ 的抛物线族。

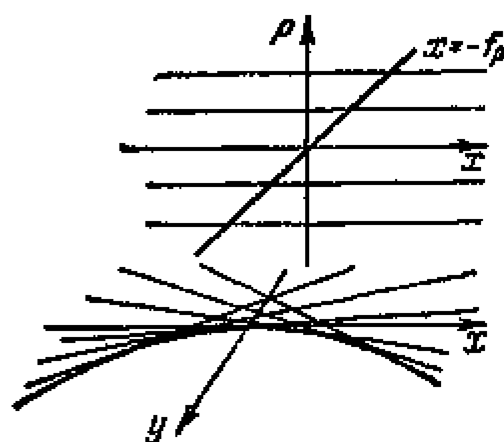


图 24

例 3 Clairaut 方程

$y=px+f(p)$（图 24）。

曲面M是直纹面（它与平面$p=$const 的交线是直线）。在M上以x，p为坐标较为方便。积分曲线可由以下各关系式给出

$$\begin{cases}y=px+f(p),\\ dy=pdx+xdp+f'(p)dp,\\ dy=pdx.\end{cases}$$

于是得出$(x+f')dp=0$。使 $x+f'=0$ 的点是临界点，其它点则是正则点。在(x,p)平面上，积分曲线是直线 $p=\text{const}=C$；一般说来，这些直线将与临界点曲线$(x+f'=0)$相交。

积分曲线在(x,y)平面上的投影是切于判别曲线的直线族 $y=Cx+f(C)$。[严格说来，直线族与临界曲线的交点并不属于M上的积分曲线，因为对于所给的方程，在这些点上接触平面切于M，从而方向场无定义]。

判别曲线可由以下条件得出：

$$y=px+f(p),\ x+f'=0.$$

例如，若 $f(p)=-p^2/2$，则判别曲线是抛物线 $y=x^2/2$，而积分曲线是它的切线。

Clairaut 方程的理论和一些重要的一般数学概念有关，这就是 Legendre

变换和射影对偶性。

D. Legendre 变换

设有变量 x 的函数 f。它的 Legendre 变换[1]是新变量 p 的函数 g，其定义如下：考虑 (x, y) 平面上 f 的图象。作斜率为 p 的直线 $y = px$。求图象上离这个直线在纵轴方向上最远的点。这个差就定义为 g 在 p 点的值(图 25)：

$$g(p) = \sup_x (px - f(x)).$$

例 1 令 $f(x) = x^2/2$。计算其 Legendre 变换得 $g(p) = p^2/2$。

例 2 令 $f(x) = x^\alpha/\alpha$，$(\alpha \geqslant 1)$。这时 $g(p) = p^\beta/\beta$，这里 $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$，从而 $\beta \geqslant 1$（这里 x，p，均为非负）。

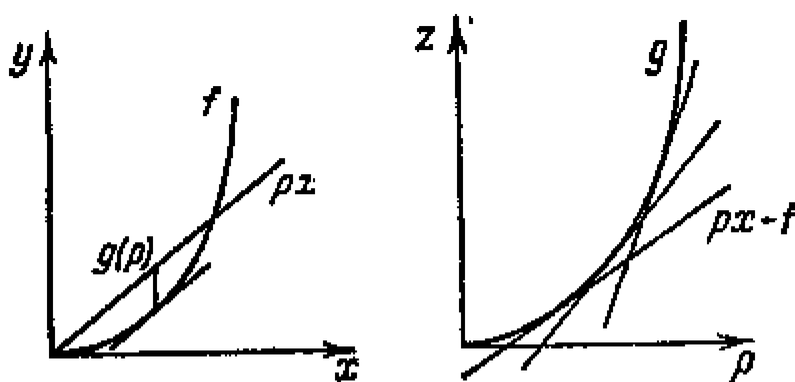


图 25

若 f 为严格凸（$f'' > 0$）且其导数给出直线到直线上的微分同胚，则函数 g 也是严格凸的，而且定义 g 的上确界在使 $f'(x) = p$ 的唯一点达到。这样的点 x 和 p 称为在 Legendre 变换下彼此相应。

定理 以下不等式恒成立

$$f(x) + g(p) \geqslant px.$$

若 f 为严格凸而 f' 是直线到直线上的微分同胚，则等号当且仅当 x 和 p 为相应时达到。

◀函数 $px - f(x)$ 不能超过其上确界 $g(p)$。▶

---

1) 在一些文献中 Legendre 变换是指的别的意义，而与 Minkowski 和 Young 有关，但我们不打算在名词上过于拘谨。

例 对任意非负的 x 和 p 有不等式 $px \leqslant \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$.

在下面的推论中，我们假设 f 和 g 为严格凸且其导数是直线到直线上的微分同胚。

推论 Legendre 变换是对合的：$g(p)$ 的 Legendre 变换在采用适当的坐标记号后仍是 $f(x)$.

◀事实上，上面定理中的不等式对 f 和 g 是对称的.▶

推论 设由严格凸函数 g 给出 Clairaut 方程 $y = px - g(p)$，而解的包络为 $y = f(x)$，则由 g 到 f 正是Legendre 变换.

◀函数 f 正是其切线族的包络.▶

注 n 变量函数的 Legendre 变换之定义完全相同，且有同样的性质．若 x 是 $\mathbf{R}^n$ 之点，则 p 是其对偶线性空间(即 $\mathbf{R}^n$ 上的线性函数之空间 $\mathbf{R}^{n*}$) 之点.

E. 射影对偶性

Legendre 变换是射影几何中一般作法的特例． 考虑 n 维射影空间．记它为 $\mathbf{R}P^n$.

射影空间的点是仿射空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的非零向量，且定义到只相差一个非零因子．这个定义可以简记为

$$\mathbf{R}P^n = (\mathbf{R}^{n+1}\backslash O)/(\mathbf{R}\backslash O).$$

射影空间中的超平面由射影空间中这样的点组成：它们在仿射空间中的相应点属于经过原点的同一超平面.

现考虑 n 维射影空间中所有超平面的集合．它本身也自然地成为一个 n 维射影空间.

事实上，射影空间中的超平面由齐次方程

$$(a, x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^{n+1}, \quad a \in \mathbf{R}^{n+1*}\backslash O$$

给出，$\mathbf{R}^{n+1*}$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的线性函数的空间(它也是 $n+1$ 维的线性空间，也称为原线性空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的对偶空间).

这样，射影空间中的超平面将对应于 $\mathbf{R}^{n+1*}$ 中的非零向量而且确定到相差一个非零实数因子．从而，$\mathbf{R}P^n$ <u>中的超平面之集</u>具

有自然的 n 维射影空间构造：

$$\mathbb{R}P^{n*}=(\mathbb{R}^{n+1*}\backslash O)/(\mathbb{R}\backslash O).$$

射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 中的超平面所成的射影空间称为 $\mathbb{R}P^n$ 的对偶空间并记作 $\mathbb{R}P^{n*}$. 例如射影平面中一切直线的空间即对偶于原空间的射影平面。

注意，对偶性是一个相互的概念，即有 $\mathbb{R}P^{n**}=\mathbb{R}P^n$. 由超平面方程 $(a, x)=0$ 中 a 与 x 位置的对称性就可看出这一点。

例 不难看到经过射影平面的某一定点的一切直线构成对偶平面上的一直线. 经过射影平面的某一定点而且位于以该点为顶点的一个角域中的一切直线，构成对偶平面上的一线段.

射影平面上一非退化二次曲线的所有切线构成对偶平面上的非退化二次曲线. 一般地说，任一光滑曲线的所有切线构成对偶平面上的一条(不一定光滑的)曲线，它称为原曲线的射影对偶曲线.

定理 严格凸函数的图象及其 Legendre 变换的图象互相射影对偶。

◀ 考虑坐标为 (x, y) 的仿射平面上所有的不平行于 y 轴的直线. 这些直线又组成另一平面，因为它们都可写成方程 $y=px-z$，从而可以把 (p, z) 看成这个新平面的仿射坐标. 采用这样的观点，Legendre 变换就是把函数 f 的图象变到其切线族：当 (x, y) 平面上的动点走遍 f 之图象时，f 图象的切线也将走遍 Legendre 变换 $z=g(p)$ 在 (p, z) 平面上的图象. ▶

这样看来，Legendre 变换无非就是由一个曲线变为其射影对偶曲线，而将此变换用仿射坐标来表示.

例 设 f 的图象是凸多边形. 其支撑直线[1]就是这样的直线：f 的图象全在其上方，但又与此直线有公共点. 考虑该凸多边形的所有支撑直线.

容易验证，它们也构成对偶平面上的凸多边形. 事实上，原多边形线的每个顶点处的支撑直线将充满一个角域，从而在对偶平面上组成一个线段. 同样，由原多边形的各线段可得对偶平面上的顶点.

射影对偶性使我们能够考虑比 Legendre 变换更一般的情况.

---

1) 凸体的支撑超平面一般地定义为这样的超平面，它与该体有公共点，而该体又全在该超平面所分出的某一个半空间内.

问题　作图 26 上的曲线之射影对偶曲线。

提示　原曲线的二重切线对应于对偶曲线的自交点，因此对偶曲线有四个自交点。

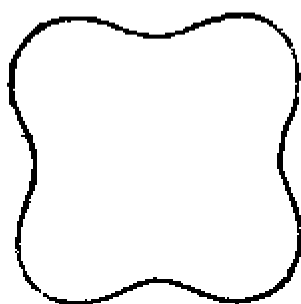


图 26

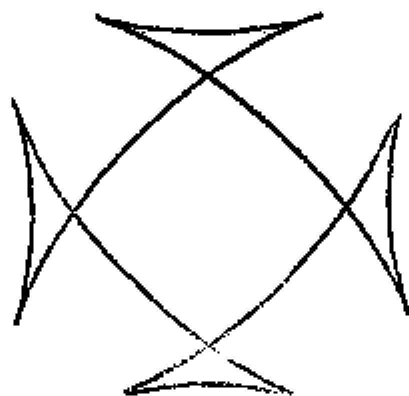


图 27

原曲线的扭转点对应于对偶曲线的尖点，事实上，若 $y = x^3$，则点 $x = t$ 处的切线将有坐标 $p = 3t^2$，$x = 2t^3$。这两个式子定义了 (p, x) 平面上的有尖点的曲线。因此，对偶曲线有八个尖点。在每一对相邻的自交点之间各有两个尖点。

其次，把原曲线看作两个相交的椭圆，而每个交点都稍为圆滑化(每个椭圆在另一椭圆内的部分都不画出)。

对偶曲线也与一对椭圆有关。原椭圆的交点相应于对偶椭圆的二重切线。由此就已容易想到怎样从一对椭圆及其二重切线作出对偶曲线(图 27)。

F. Legendre 变换与对偶范数

定义　$\mathbf{R}^n$ 的范数是一个实非负的、凸的、一阶正齐次的偶函数，在且只在原点为 0:

$$f \geqslant 0,\ f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ f(\lambda x) = |\lambda| f(x),$$
$$f(x + y) \leqslant f(x) + f(y).$$

设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 的范数。函数 f 由使它为 1 的集来确定。这个集是 $\mathbf{R}^n$ 中的凸的，对原点为中心对称的超曲面。反之，每一个关于原点为中心对称的紧凸体，若它包含原点，也定义唯一的范数而在这个体的边界上为 1。超曲面 $f = 1$ 称为范数 f 的单位球面。

问题 1　求 $\mathbf{R}^2$ 的以下各种范数下的单位球面：

a) $f=\sqrt{(x, x)}$,　b) $f=\max|x_i|$,　c) $f=\Sigma|x_i|$.

考虑 $\mathbf{R}^n$ 的对偶空间 $\mathbf{R}^{n*}$.

定义　$\mathbf{R}^{n*}$ 中的对偶范数定义为

$$g(p)=\max_{f(x)\leqslant 1}|(p, x)|.$$

容易验证 g 确是范数。

对偶性关系是相互的，因为定义对偶范数的不等式可以写为对称的形式 $|(p, x)| \leqslant f(x) g(p)$.

对应于对偶空间的每一点 p 作原空间的超平面 $(p, x)=1$.

定理　对偶范数下的单位球面即原范数下的单位球面之支撑超平面集。

◀条件 $g(p)=1$ 表明 (p, x) 在原单位球面上的最大值为1，即是说平面 $(p, x)=1$ 是原球面的支撑超平面。▶

问题 2　求 $\mathbf{R}^3$ 中对偶于 a) 球面，b) 四面体，c) 立方体，d) 八面体的对偶曲面。

问题 3　求问题 1 中各个范数的对偶范数.

由以上所述可见，凸超曲面到其对偶曲面的变换局部地由 Legendre 变换给出。

G. 平面曲线的包络问题

两个光滑的二元函数

$$x=x(s, t), \quad y=y(s, t),$$

给出平面上一个曲线族，它以 t 为曲线上的参数(表明点在曲线上的位置)，而以 s 为族中的标号参数(表明曲线在族中的标号)。

问题　画出以下函数所表示的曲线族.

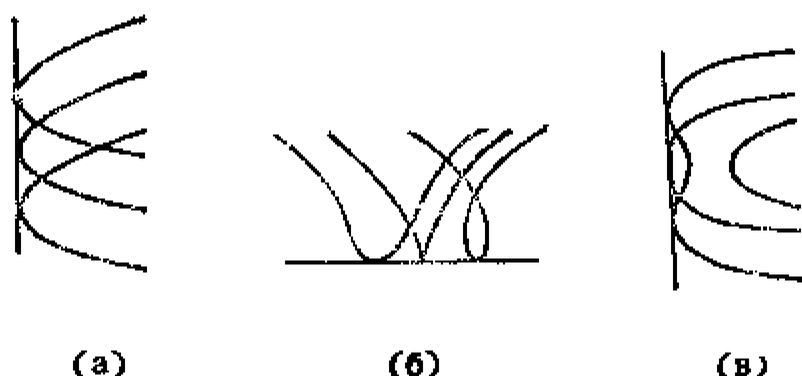
a) $x=(s+t)^2$, $y=s$

b) $x=s+st+t^3$, $y=t^2$ (s 与 t 很小)

c) $x=(s+t^2)^2$, $y=t$.

答　见图 28.

可以证明，对通有的曲线族，其包络是一个曲线，而其可能



(a)　　(б)　　(в)

图 28

的奇点只有尖点(如半立方抛物线那样)与自交点；在包络光滑的每一点附近，可以用坐标的光滑变换 $X(x,y)$，$Y(x,y)$与参数的光滑变换 $S(s)$，$T(s,t)$ 把曲线族化成 a)，b)，c) 这三种标准形之一．但在(复)全纯情况下这一点不真．

在判别曲线的通有的点附近，隐方程通有地可以用光滑的坐标变换化为标准形(见 § 4)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x.$$

积分曲线到 (X,Y) 平面的投影成为 (X,Y) 坐标的半立方抛物线．于是，只有在很例外的情况（例如对 Clairaut 方程）下，判别曲线才是积分曲线族的投影之包络．特别地，对 Clairaut 方程作一个微小的通有的扰动，判别曲线就从积分曲线族的投影之包络变为其尖点轨迹．

§ 4. 隐方程在正则奇点附近的标准形

这里我们讨论通有的隐方程的积分曲线族的奇点．

A. 奇点

考虑由定义在某区域的光滑函数 F 给出的方程

$$F(x,y,p)=0,\quad 其中\ p=dy/dx. \tag{1}$$

设方程(1)在坐标为 (x,y,p) 的三维节空间中给出一个光

滑曲面．根据隐函数定理，只需设在 $F=0$ 处函数 F 的全微分不为 0 即可，而我们即作此假设。

考虑曲面 $F=0$ 沿 p 方向在 (x, y) 平面上的投影。

定义　若在曲面 $F=0$ 的某点附近，曲面到坐标平面的投影不是局部微分同胚，此点就称为方程 (1) 的奇点．

由隐函数定理，奇点就是曲面 $F=0$ 上使 $\frac{\partial F}{\partial p}=0$ 的点．

B. 判别式轨迹

考虑方程(1)所有奇点的集合．它由 $F=0$ 和 $\frac{\partial F}{\partial p}=0$ 两个方程在三维节空间中给出．所以，"一般说来"奇点将构成一条曲线．

定义　方程 $F=0$ 在三维节空间 (x, y, p) 中的奇点之集合称为该方程的判别式轨迹．

由隐函数定理，若在判别式轨迹的一点附近，由三维空间到平面的映射 $(x, y, p) \longmapsto \left(F, \frac{\partial F}{\partial p}\right)$ 的导映射有最大秩(即秩为 2)，则判别式轨迹在此点附近是光滑曲线．

C. 判别曲线

定义　判别式轨迹沿 p 方向在 (x, y) 平面上的投影称为判别曲线[1]．

由隐函数定理，若判别式轨迹在其上一点不切于 p 方向，则在该点附近，判别式轨迹可微分同胚地沿 p 方向投影到 (x, y) 平面中．

注　在上述条件下，判别曲线也可能有奇点．

一般说来，这些奇点之所以产生是由于判别式轨迹的好几个点都被投影到同一点．这些奇点将是判别曲线的自交点．对于通

---

1) 这个定义也就是 §3 中的判别曲线定义的重述．

有的方程，在这种点附近判别曲线将由相交的两枝构成，而且其交角不为 0。

另一方面，若判别式轨迹在某点的切线平行于 p 方向，则在判别曲线上通有地会出现尖点。

除了自交点和尖点外，判别曲线的所有更复杂的奇点都可以通过对方程进行小摄动而消除。这两类奇点在方程的小变形之下仍然保持，只不过略微移动位置。

D. 判别式轨迹与接触平面相切的点

在节空间的每一点都有一个接触平面 $dy = p\,dx$. 特别是在判别式轨迹上各点处都有这样的平面。判别式轨迹在一点的切线既可能位于此平面上，也可能与它相交。

定义 判别式轨迹上的一点，若其切线位于该点的接触平面上，就称它为与接触平面的切点。

我们要注意，判别式轨迹与 p 方向的切点都是与接触平面相切的点。事实上，每点的接触平面都包含 p 方向。

E. 正则奇点

定义 方程(1)的奇点称为正则奇点，若在此点满足判别式轨迹的光滑性条件[1]

$$\operatorname{rank}((x, y, p) \longmapsto (F, F_p)) = 2,$$

而且判别式轨迹不切于接触平面。

例 考虑方程 $p^2 = x$. 判别式轨迹由方程 $p = 0$, $x = 0$ 给出，这就是 y 轴. 光滑性条件是适合的. 切于判别式轨迹的向量 $(0,1,0)$ 不在接触平面 $dy = 0dx$ 上，因此方程 $p^2 = x$ 每个奇点都是正则的.

注 对于通有的方程，几乎所有奇点都是正则的；非正则奇点离散地分布在判别式轨迹上。若已给的方程不是这样，则无论如何对方程作一个小摄动后总可以变成这样 （这一个和以前的"涉

1) 所谓映射的秩（rank）是指其导映射的秩.

及通有性（genericity）的考虑"都可以用§10的 Sard 定理证明）。

F. 标准形定理

定理 令 (x_0, y_0, p_0) 为方程 $F(x, y, p)=0$ 的正则奇点，则存在 (x, y) 平面上 (x_0, y_0) 邻域到 (X, Y) 平面上 $(0, 0)$ 邻域的微分同胚，化方程 $F=0$ 为 $P^2=X$ $(P=dY/dX)$.

说明 (x, y) 平面的每点附加一个线性元素 p 构成三维空间 (x, y, p). $F=0$ 在其中定义了一个曲面. (x, y) 平面的微分同胚将每一个线性元素 p 变为一个新的线性元素 P. 可以断定，曲面 $F=0$ 在正则奇点附近的部分将变为曲面 $P^2=X$ 在点 $(X=0, Y=0, P=0)$ 附近的部分.

推论 在正则奇点附近，方程(1)的积分曲线族微分同胚于 (X, Y) 平面上的半立方抛物线族 $Y=\frac{2}{3}X^{3/2}+C$.

◀ 定理中所述的微分同胚把方程(1)在 (x, y) 平面上的积分曲线族化为方程 $P^2=X$ 在 (X, Y) 平面上的积分曲线族. 而后者为半立方抛物线族，其尖点均在判别式曲线上，即有

$$dY/dX=\sqrt{X}, \quad Y=\frac{2}{3}X^{3/2}+C. \ ▶$$

G. 标准形定理的证明

◀ 1° 归结成判别式轨迹为 y 轴的情况.

令 (x_0, y_0, p_0) 为方程 $F=0$ 的正则奇点. 这时，判别曲线在 (x_0, y_0) 附近是光滑的. 考虑判别式轨迹上各点的接触平面到 (x, y) 平面上的投影. 我们将在 (x_0, y_0) 附近得到一族不切于判别式曲线的直线.

现在在 (x, y) 平面上 (x_0, y_0) 附近选一个局部坐标系使得：(1)判别曲线的方程成为 $x=0$；(2) 直线 $y=\text{const.}$ 沿着上述方向与判别曲线相交.

我们仍把这个坐标记作 (x, y)，导数 dy/dx 也记作 p. 现在奇点的坐标成为$(0,0,0)$.

2° 正则性条件的分析.

在上述坐标系下，判别式轨迹是 y 轴：在其上 $x=0$，$p=0$ $(y=\text{const})$. 由此可知，我们的方程在所引入的坐标中适合$F(0, y, 0)=0$，$F_p(0, y, 0)=0$. 判别式轨迹的正则性条件现在是

$$\det\left|\frac{D(F, F_p)}{D(x, p)}\right|\neq 0 \quad \text{亦即} \quad \begin{vmatrix} F_x & F_{px} \\ F_p & F_{pp} \end{vmatrix}\neq 0$$

(因为在判别式轨迹上 $F_y=0$，$F_{yp}=0$). 此外，在判别式轨迹上 $F_p=0$. 因此判别式轨迹的正则性条件可写为

$$F_x(0, y, 0)\neq 0,\ F_{pp}(0, y, 0)\neq 0.$$

与接触平面不相切的条件自动满足.

将 F 按 p 展为余项为 2 次的 Taylor 展开式:

$$F(x, y, p)=A(x, y)+pB(x, y)+p^2C(x, y, p).$$

由上述的关系式可知 $A(0, y)=0$，$B(0, y)=0$. 因此有

$$A(x, y)=x\alpha(x, y),\ B(x, y)=x\beta(x, y),$$

α 与 β 是光滑函数.

判别式轨迹的正则性条件是 $A_x(0, y)\neq 0$，$C(0, y, 0)\neq 0$. 以下我们甚至可以假设 $C>0$，$A_x<0$ (若不然则改变 F 或 x 的符号). 于是 $\alpha(0, 0)<0$，$C(0, 0, 0)>0$.

3° 二次方程的研究.

把 $F=0$ 看成系数为 C, B, A 的 p 的二次方程. 我们可得

$$p=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{2C}=\frac{-x\beta\pm\sqrt{x\gamma}}{2C},$$

这里 $\gamma=-4\alpha C+x\beta^2$ 是 (x, y, p) 的函数；这时

$$\gamma(0, 0, 0)=-4\alpha(0, 0)C(0, 0, 0)>0.$$

最后，令 $x=\xi^2$. 在"±"中只取"+"，可得

$$p=\frac{-\xi^2\beta+\xi\sqrt{\gamma(\xi^2, y, p)}}{2C(\xi^2, y, p)}.$$

对这个关于 p 的方程应用隐函数定理，可得 $p=\xi\omega(\xi, y)$，ω 是

光滑函数而且 $\omega(0,0)\neq 0$.

4° $y(\xi)$ 的微分方程.

注意到 $p=dy/dx=dy/2\xi d\xi$，可得 $y(\xi)$ 的微分方程

$$dy/d\xi=2\xi^2\omega(\xi,y),\ \omega(0,0)\neq 0. \tag{2}$$

在 (ξ,y) 平面上的积分曲线与轴 $\xi=0$ 相交而与直线 $y=\mathrm{const}$ 二阶相切.因此方程有形如 $I(\xi,y)=y-\xi^3K(\xi,y)$ 的初积分，K 是光滑函数而 $K(0,0)\neq 0$ (I 是过 (ξ,y) 的积分曲线与轴 $\xi=0$ 的交点的纵坐标;因为 $\omega\neq 0$，所以 $K\neq 0$).

5° 标准化坐标的作法

将 K 分解为对于 ξ 为奇或偶的部分:

$$K(\xi,y)=L(\xi^2,y)+\xi M(\xi^2,y).$$

L 与 M 是 x 和 y 的光滑函数而且 $L(0,0)\neq 0$. 应用这些记号可写出 $I(\xi,y)=y-\xi^4M(\xi^2,y)-\xi^3L(\xi^2,y)$. 现按以下公式引入新变量 Y 和 Ξ

$$\Xi=\xi\sqrt[3]{L(\xi^2,y)},\quad Y=y-\xi^4M(\xi^2,y).$$

于是 $I=Y-\Xi^3$.

再令 $X=\Xi^2$. 于是

$$X=x\sqrt[3]{L^2(x,y)},\quad Y=y-x^2M(x,y).$$

这些公式给出平面在$(0,0)$附近的微分同胚，因为 $L(0,0)\neq 0$.
首次积分现在成为

$$I=Y-X^{3/2}.$$

现在 $(dY/dX)^2=\dfrac{9}{4}X$. 放大一个坐标轴即得标准形式.

H. 注

上面的证明的基本步骤是作代换 $x=\xi^2$，即过渡到 (x,y) 平面的双叶覆盖,它沿判别曲线分枝. 利用拓扑方法(当然在复域中),事先就很清楚，$p(x,y)$ 的二值性在这个双叶覆盖上会消除，而方程则分成两个. 只是因为要在实域中证明这个事实才有必要为二次方程麻烦. 余下的只需将覆盖空间上的方程(2)用覆盖平

面到其自身的微分同胚化为标准形．把初积分分解为ξ的偶和奇部分就很容易做到这一点．

标准形定理的第一个证明是 Ю. А. Бродский 给出的[1]．它依据 R. Thom 的工作，Thom 把方程只化为 $p^2 = xE(x, y)$的形状．

注 我们的证明中将偶函数表为其变元的平方之函数．对解析函数(或形式幂级数)，这种表示法是明显的．对于光滑函数则还要证明．

无穷可微偶函数确实也可看作其变元的平方的函数，从而定义在正半轴上．它在正半轴上包括原点是无穷可微的．我们要把它表为一个在全轴上的无穷可微函数之在正半轴上的限制．

这种表示法的可能性意味着可能光滑地拓展到负半轴上．这可以由 E. Borel 的一个定理来保证，这定理指出存在着实轴上的无穷可微而在原点有任意指定 Taylor 级数的函数．我们略去这个定理的证明(然而并不复杂)．

§5. 定态 Schrödinger 方程

本节讲述初等量子力学的最初步的数学基础．我们不去讲所引入的定义的物理来源，而只用物理术语来描述解的性质．

A. 定义和记号

在物理学中，方程

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (E - U(x))\Psi = 0 \tag{1}$$

称为定态 Schrödinger 方程．

自变量 x 称为粒子的笛卡尔坐标． 未知函数 Ψ 通常取复值，称为粒子的波函数； Schrödinger 方程的解称为粒子的态．谱参

1) 英译本认为是 D. Lak 给出的，但两种本子都没有给出详细的文献和出处，下述 Thom 的工作也未给出．——译者注

数E称为粒子的能量．已知函数$U(x)$称为粒子的势或位能．量子力学主要就是研究方程(1)及推广它的偏微分方程式或组的性质．

例 令$U=0$．这时粒子称为自由的．能量$E=k^2$自由粒子的Schrödinger方程是

$$\Psi_{xx}+k^2\Psi=0. \tag{2}$$

它有两个线性无关解

$$\Psi_+=e^{ikx},\ \Psi_-=e^{-ikx}. \tag{3}$$

这两个解分别称为以动量$k>0$向右和向左运动的粒子．这样，能量为E的自由粒子的态空间是二维复空间．

物理学家把波函数在某点值的模的平方称为粒子位于该点的概率密度．于是，动量为k的自由粒子"位于任何点的概率都相同"(应用这样的术语时，可以完全不问这些话的意义，也不必问它和概率论有什么关系)．

B. 势垒

设势具有紧支集(即只在某有界集内非0)．若$U\geqslant 0$就说有势垒，$U\leqslant 0$就说有势阱，势异于0的区域的闭包称为势的支集(图29)．

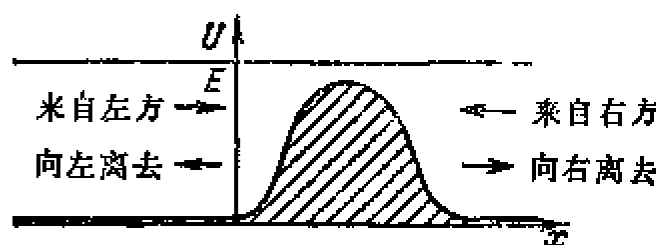


图 29

设粒子的能量为正：$E=k^2$．于是在支集之左，Schrödinger方程(1)与自由粒子方程(2)相同．这样，Schrödinger方程有两个解在支集左方即e^{ikx}与e^{-ikx}．它们分别称为来自左方的与向左离去的粒子．注意，这两个解都是定义在整个x轴上的，只是在支集左方才与e^{ikx}，e^{-ikx}相同．

同理也存在两个解在支集右方与e^{ikx}和e^{-ikx}相同．它们分

别称为来自右方的与向右离去的粒子。

问题 粒子是否可能来自左方后完全向左反射(即波函数是否可能在势垒右方全为0，而在其左方则否)？是否可能完全向右离去？

答。否、是。

C. 单值化算子

定义 具有紧支集势的Schrödinger方程(1)的单值化算子是由能量 $E=k^2$ 的自由粒子的态空间到其自身的线性变换，其定义如下：

相应于自由粒子方程(2)的一解，作Schrödinger方程之一解，使在支集左方与之重合，而对此解又定出其在支集右方的值。

可以发现，单值化算子具有引人注意的(1,1)-酉性质。为了陈述它，我们引入以下的记号。

记号 用 $\mathbf{R}^2$ 记 Schrödinger 方程(1)的实解的空间。粒子的态空间(即复解的空间)是 $\mathbf{R}^2$ 的复化，记作 $\mathbf{C}^2={}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^2$。来自和离向左、右方的粒子这四种状态都属于此空间。

自由粒子方程(2)的实解的空间记作 $\mathbf{R}_0^2$ (因为对于自由粒子有 $U=0$)。这个空间有自然的基底

$$e_1=\cos kx,\quad e_2=\sin kx.$$

自由粒子的态空间记作 $\mathbf{C}_0^2$，它是 $\mathbf{R}_0^2$ 的复化。向左与向右运动的粒子之态成了它的自然的基底。将它们记作

$$f_1=e^{ikx},\quad f_2=e^{-ikx}.$$

注意，e_1 与 e_2 也是态空间的基底。这两组基底的关系是

$$f_1=e_1+ie_2,\quad f_2=e_1-ie_2.$$

定义 (1,1)-酉么模矩阵的群 $SU(1,1)$ 由行列式为1且保持 Hermite 形式 $|z_1|^2-|z_2|^2$ 的复二阶矩阵构成，换言之即适合下式的二阶矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$：

$$|a|^2-|b|^2=|c|^2-|d|^2=1,\quad a\bar{c}-b\bar{d}=0,$$
$$ad-bc=1.$$

定理　单值化算子在基底 (f_1, f_2) 下的矩阵属于群 $SU(1, 1)$。

单值化算子属于 $SU(1, 1)$ 的理由在于：方程(1)的相流保持面积不变。为证明这一点，我们先回忆一下有关群 $SU(1, 1)$ 的一些知识。

D. 代数的插话：群 $SU(1, 1)$

考虑实线性空间 $\mathbf{R}^2$ 及其复化 $\mathbf{C}^2$。在 $\mathbf{R}^2$ 中取一面积元素并以 $[\xi, \eta]$ 记向量 ξ、η 所成的平行四边形的有向面积。斜对称数量积[,]称为辛构造。若在 $\mathbf{R}^2$ 中取定一基底 e_1, e_2 使 $[e_1, e_2] = 1$，则 $[\xi, \eta]$ 正是向量 ξ, η 对于基底 e_1, e_2 分量所成的行列式。

双线性型[,]的复化给出了 $\mathbf{C}^2$ 中的辛构造，我们仍用同样的括弧来记它。

在 $\mathbf{C}^2$ 中考虑 Hermite 型 $\langle \xi, \eta \rangle = \frac{i}{2}[\xi, \bar{\eta}]$。它确是 Hermite 型：$\langle \lambda\xi, \eta \rangle = \lambda\langle \xi, \eta \rangle$，$\langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}$。为了以后之用，特计算 $f_1 = e_1 + ie_2$，$f_2 = e_1 - ie_2$ 的 Hermite 积。易证下引理。

引理　$\langle f_1, f_1 \rangle = 1$，$\langle f_2, f_2 \rangle = -1$，$\langle f_1, f_2 \rangle = 0$。

◀ 例如

$$\langle f_1, f_1 \rangle = \frac{i}{2}[f_1, \bar{f}_1] = \frac{i}{2}[f_1, f_2] = \frac{i}{2}\begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix} = 1. \ ▶$$

于是我们说 Hermite 型⟨ , ⟩是"(1.1)型的"(其典则形式有一个正的和一个负的平方：$\langle z, z \rangle = |z_1|^2 - |z_2|^2$，这里

$$z = z_1 f_1 + z_2 f_2).$$

现在考虑平面 $\mathbf{C}^2$ 上保持 Hermite 构造，辛构造和实构造的线性变换。

定义　平面 $\mathbf{C}^2$ 上保持 Hermite 构造⟨ , ⟩的线性变换群称为(1.1)-酉群，并记作 $U(1, 1)$。

平面 $\mathbf{C}^2$ 上保持辛构造[,]的线性变换群称为特殊(或么模)二

阶线性群，并记作 $SL(2, \mathbf{C})$。

平面 $\mathbf{C}^2$ 上一切非奇异实线性变换之群（即元素为 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换复化的群）称为二阶实线性群，并记作 $GL(2, \mathbf{R})$。

这样，我们已在 $\mathbf{C}^2$ 的一切线性变换群 $GL(2, \mathbf{C})$ 中定义了三个子群：(1,1)-酉群 $U(1, 1)$，么模群 $SL(2, \mathbf{C})$ 与实线性群 $GL(2, \mathbf{R})$。

定义酉群的 Hermite 型$\langle , \rangle$ 定义么模群的辛构造$[,]$，以及定义实线性群的复共轭，三者之间有关系式

$$\langle a, b\rangle = \frac{i}{2}[a, \bar{b}].$$

定理 上述三个子群中任两个之交都等于三者之交（图30）。

这个交称为特殊(1,1) 酉群[1]，并记作 $SU(1, 1)$（它也称为实么模群而记作 $SL(2, \mathbf{R})$。它还称为二阶实辛群，记为 $Sp(1, \mathbf{R})$）。

◀ 若变换 A 是实的且为么模的，则 $[A\xi, A\eta] = [\xi, \eta]$ 以及

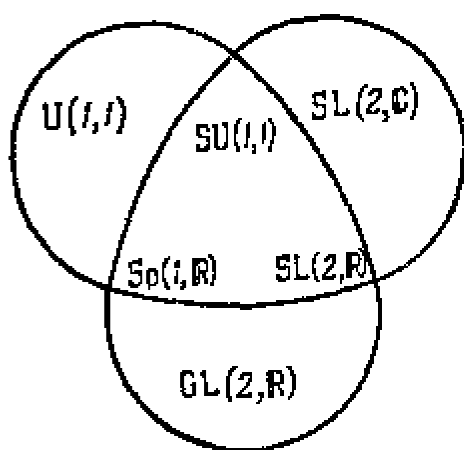


图 30

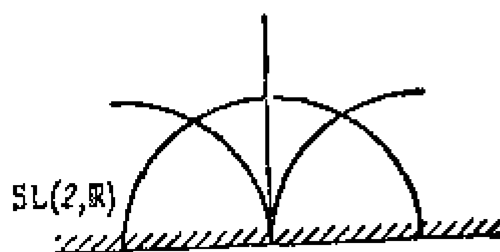


图 31

1）强调一下，这里讲的是算子群而非矩阵群。这些算子在上述特定基底下的矩阵属于矩阵群 $SU(1,1)$。

$\overline{A\xi} = A\bar{\xi}$。因此

$$\langle A\xi, A\eta\rangle = \frac{i}{2}[A\xi, \overline{A\eta}] = \frac{i}{2}[A\xi, A\bar{\eta}] = \frac{i}{2}[\xi, \bar{\eta}] = \langle\xi, \eta\rangle.$$

若A为实的且为(1,1)-酉的，则 $\langle A\xi, A\eta\rangle = \langle\xi, \eta\rangle$ 且 $\overline{A\xi} = A\bar{\xi}$. 所以 $[A\xi, A\eta] = -2i\langle A\xi, \overline{A\eta}\rangle = -2i\langle A\xi, A\bar{\eta}\rangle = -2i\langle\xi, \bar{\eta}\rangle = [\xi, \eta]$.

若A为(1,1)-酉的且为幺模的，则 $[A\xi, A\eta] = [\xi, \eta]$ 以及 $[A\xi, \overline{A\bar{\eta}}] = [\xi, \eta]$. 因此对一切$\xi$与$\eta$有 $[A\xi, \overline{A\bar{\eta}}] = [A\xi, A\eta]$. 从而对一切$\xi$有 $[\xi, \overline{A\bar{\eta}} - A\eta] = 0$, 所以对一切$\eta$有 $\overline{A\bar{\eta}} = A\eta$ 即A为实的. ▶

推论　若算子在实基底 (e_1, e_2) 下的矩阵是实幺模的，则在复共轭基底 $(f_1 = e_1 + ie_2,\ f_2 = e_1 - ie_2)$ 下必为特殊(1,1)-酉的. 反之亦然.

◀ 向量 $z = z_1f_1 + z_2f_2$ 的 Hermite 标量平方可以通过基底 (f_1, f_2) 下的坐标 (z_1, z_2) 表示如下: $\langle z, z\rangle = |z_1|^2 - |z_2|^2$ (见引理). 所以

基底 (e_1, e_2) 下的矩阵A为实幺模的 $\Longleftrightarrow A \in SU(1, 1) \Longleftrightarrow$ 基底 (f_1, f_2) 下的矩阵A是(1,1)-酉的与幺模的. ▶

E. 几何的插话: $SU(1, 1)$ 与 Лобачевский 几何

矩阵群 $SL(2, \mathbf{R})$ 和 $SU(1, 1)$ 与 Лобачевский 几何有如下的联系(图 31).

一个实的二阶幺模矩阵定义了一个分式线性变换

$$z \longmapsto (az + b)/(cz + d).$$

此变换将上半平面变为自身. 这个变换就是表示为上半平面的 Лобачевский 平面的运动. 所有这种运动都可以这样得出. Лобачевский 平面的运动群同构于 $SL(2, \mathbf{R})/\pm E$.

二阶幺模(1,1)酉矩阵定义了一个变单位圆为其自身的分式线性变换. 事实上，在幺模(1,1)-酉变换下，锥 $|z_1|^2 < |z_2|^2$ 变为自身. 在自然投影

$$\mathbf{C}^2\backslash O \to \mathbf{C}P^1,\ (z_1, z_2) \longmapsto w = z_1/z_2$$

下，这个锥变为单位圆 $|w| < 1$，而 $\mathbf{C}^2$ 的线性变换变为 $\mathbf{C}P^1$ 的分式线性变换(图 32)。

由 $SU(1,1)$ 中的矩阵所得的变单位圆为其自身的分式线性变换是表示为单位圆内域的 Лобачевский 平面的运动。Лобачевский 平面的所有运动都可以这样得出。所以 Лобачевский 平面的运动群同构于 $SU(1,1)/\pm E$。

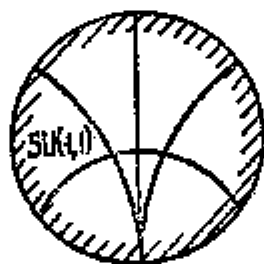


图 32

矩阵群 $SL(2,\mathbf{R})$ 和 $SU(1,1)$ 是同构的；因为它们可以从同样的算子群得出。这些算子的矩阵在实基底 (e_1, e_2) 下属于 $SL(2,\mathbf{R})$，而在复基底 (f_1, f_2) 下属于 $SU\times(1,1)$。由 $SL(2,\mathbf{R})$ 变为 $SU(1,1)$ 相当于由实基底变为复共轭基底，亦即由 Лобачевский 平面的上半平面模型变为其单位圆模型。

问题　证明群 $SL(2,\mathbf{R})$ 同胚于环面体 $S^1\times D^2$(形如轮胎的内域)。

F. 实单值化算子的性质

回到 Schrödinger 方程(1)的单值化算子。除方程(1)和方程(2)的解空间 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}_0^2$ 以外，再考虑**相平面** $\mathbf{R}_\Phi^2$。相平面的点是一对实数 (ψ, ψ_x)

固定一点 $x\in\mathbf{R}$。考虑将方程(1)的每个(实)解映为其在 x 点的初值的算子

$$B^x: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_\Phi^2,\ \psi \longmapsto (\psi(x),\ \psi_x(x)).$$

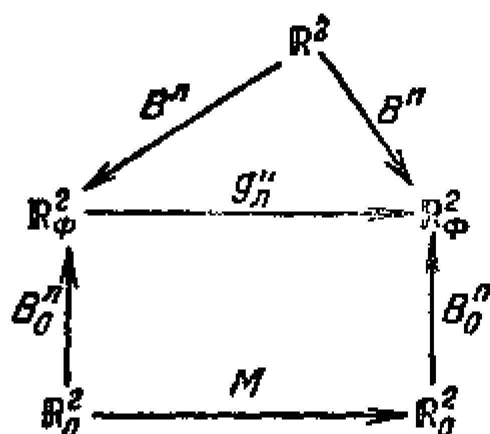
这个算子是一个同构。同构 $g_{x_1}^{x_2} = B^{x_2}(B^{x_1})^{-1}$ 称为**由 x_1 到 x_2 的相变换**。

对于自由粒子方程(2)，算子(解 $\longmapsto$ 相点)

$$B_0^x: \mathbf{R}_0^2 \to \mathbf{R}_\Phi^2$$

可以同样定义。

应用这样的记号，单值化算子 M 可以由同构的如下可交换图式来定义：



其中上标$Л$与$П$分别表示支集左方与右方的点，算子M与这些点的选法无关。

定理　Schrödinger 方程(1)的单值化算子行列式等于1。

◀ 在自由粒子的实的态空间中取基底 $e_1 = \cos kx$，$e_2 = \sin kx$。在实的相空间 $\mathbb{R}^2_0$ 中选取坐标 ψ，ψ_x，亦即确定一个基底。在此基底中算子 B_0^x 的矩阵是

$$(B_0^x) = \begin{pmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -k\sin kx & k\cos kx \end{pmatrix}.$$

因此，$\det B_0^x = k$ 与 x 无关。特别是上图左右两个竖行的同构的行列式相同。由于该图是可交换的，$\det M = \det g_L^R$。但由 Liouville 定理相流保持面积不变（Schrödinger 方程中不出现含 ψ_x 的项）。这意味着 $\det g_L^R = 1$，从而 $\det M = 1$。▶

G. 复单值化算子的性质

◀ §5的C中关于(1,1)-酉性的定理证明如下。

复单值化算子是实单值化算子的复化（见§5的C）。

在实基底（e_1，e_2）下单值化算子矩阵属于 $SL(2,\mathbb{R})$（见§5 F）。因此它在复共轭基底（$f_1 = e_1 + ie_2$，$f_2 = e_1 - ie_2$）下的矩阵属于 $SU(1,1)$（见§5 D 推论）。▶

问题　证明 Schrödinger 方程(1)不会有如此的非零解，它在支集左方等于 ae^{ikx}，而在支集右方等于 be^{-ikx}（即粒子不可能到达而不离去）。

解　单值化算子保持(1,1)-Hermite 平方 $|z_1|^2 - |z_2|^2$。但

$$\langle ae^{ikx}, ae^{ikx}\rangle = |a|^2, \quad \langle be^{-ikx}, be^{-ikx}\rangle = -|b|^2$$

（见§5D的引理）。因此 $|a|^2 = -|b|^2$，即 $a = b = 0$。

H. 透射系数和反射系数

定义 设 Schrödinger 方程(1)中的 $E=k^2$ 有解

$e^{ikx}+Be^{-ikx}$, 在势垒左方;

Ae^{ikx}, 在势垒右方 (图 33);

就说有粒子以动量 $k>0$ 来自左方而以**透射系数** $|A|^2$ 穿过势垒，而且有**反射系数** $|B|^2$.

引理 对任意 $k>0$ 均有满足以上条件的解 Ψ 与复常数 A, B 存在，且为唯一的.

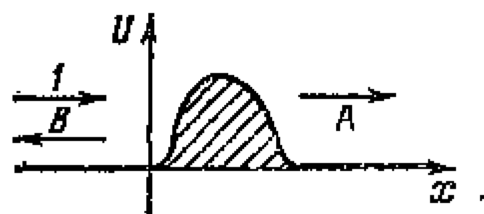


图 33

◀ 考虑向右离去的粒子(即在势垒右方为 e^{ikx} 的解). 在势垒左方，这个解和其它解一样是 e^{ikx} 和 e^{-ikx} 的线性组合，而且由单值化算子的(1,1)酉性知 e^{ikx} 的系数不为 0 (见 §5 **F** 中的问题).

用此非零系数遍除此解即得所求解.

于是系数 A 与 B 可唯一地确定. ▶

问题 证明透射系数恒不为 0.

解 若在势垒右方 $\Psi=0$, 则在其左亦然.

定理. 透射系数与反射系数之和为 1.

◀**引理** 在基底 ($f_1=e^{ikx}$, $f_2=e^{-ikx}$) 下，单值化算子矩阵可按以下公式用复系数 A, B 表出:

$$(M)=\begin{pmatrix}1/A & -\bar{B}/\bar{A}\\ -B/A & 1/A\end{pmatrix}.$$

◀由系数 A, B 的定义，单值化算子是映射 $f_1+Bf_2\longmapsto Af_1$. 因为单值化算子是实的，我们也可以找到复共轭向量的象. 注意到 $f_1=\bar{f}_2$, 即得 $f_2+\bar{B}f_1\longmapsto\bar{A}f_2$. 分别用 $A\neq 0$ 与 $A\neq 0$ 去除，即得单值化算子的逆的矩阵

$$(M^{-1})=\begin{pmatrix}1/A & B/\bar{A}\\ B/A & 1/A\end{pmatrix}.$$

为求二阶幺模矩阵之逆只需将主对角线上的元素对调而将主对角线外的元素变号：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}. ▶$$

条件 $M\in SU(1,1)$ 给出 $1/|A|^2-|B|^2/|A|^2=1$. ▶

问题　对于在 $0\leqslant x\leqslant a$ 中取常值 U_0 而在其外为 0 的势，计算透射系数和反射系数(图 34)。

答

$$|A|^2=\frac{1}{1+\dfrac{U_0^2\sin^2 ak_1}{4E(E-U_0)}}.$$

其中 $E=k^2$, $E-U_0=k_1^2$ (粒子通过势垒将会变慢；因此在势垒内找到它的概率大于在其外找到它的概率)。对于大的 E，反射系数趋于 0，

$$|B|^2\sim\frac{U_0^2}{4E(E-U_0)}\sin^2 ak_1.$$

若粒子能量低于势垒之高，则透射系数将按指数减小：

$$|A|^2=\frac{4k^2\chi^2}{(k^2+\chi^2)\mathrm{sh}^2 a\chi+4k^2\chi^2},$$

其中 $E=k^2$, $U_0-E=\chi^2$ (图 35)。虽然穿过又高又宽的势垒的透射系数很小，它仍然非 0 (“隧道效应”：量子粒子能穿过经典

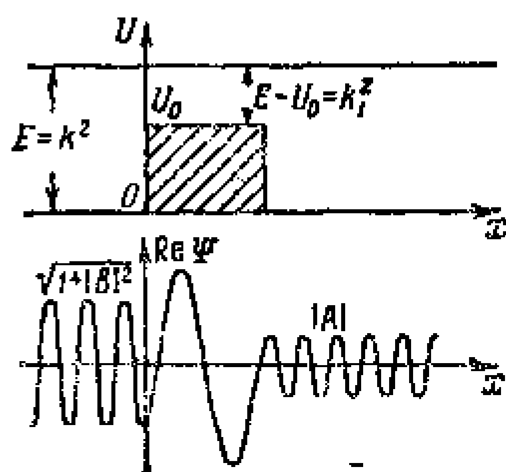


图 34

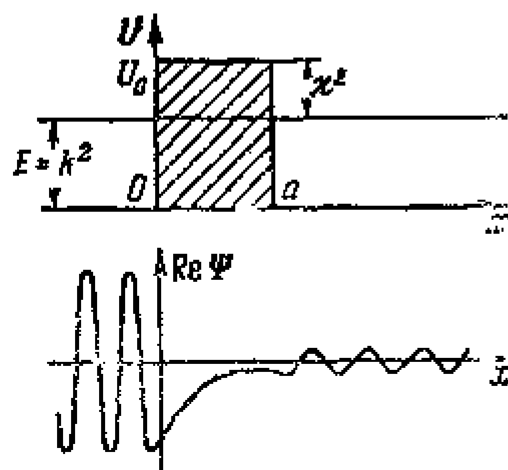


图 35

粒子不能穿透的势垒)。

I. 散射矩阵



图 36

与自左向右穿过势垒一样，也可考虑自右向左的穿透。相应的解 Ψ_2 是

$e^{-ikx}+B_2e^{ikx}$，势垒右方，

A_2e^{-ikx}，势垒左方(图 36)。

定义 矩阵

$$S=\begin{pmatrix}A & B\\ B & A_2\end{pmatrix}$$

称为散射矩阵(或 S 矩阵)。

注 从定态 Schrödinger 方程来看，很难理解这个矩阵相应于哪一个算子，以及为什么它具有我们即将证明的值得注意的性质。解释在于 S"变进入的粒子为离去的粒子"，如果考虑非定态方程(但我们不去做这件事)，就可以给以上陈述以准确的含意。

定理 散射矩阵是酉矩阵，而且自左向右与自右向左的透射系数都相同：$A=A_2$。

◀单值化算子的作用如下：

$$A_2f_2\longmapsto f_2+B_2f_1,\quad \bar{A}_2f_1\longmapsto f_1+\bar{B}_2f_2.$$

因此

$$(M)=\begin{pmatrix}1/\bar{A}_2 & B_2/A_2\\ \bar{B}_2/\bar{A}_2 & 1/A_2\end{pmatrix}.$$

与§5的 H 中所计算出的矩阵比较，即有

$$A_2=A,\quad B_2=-\bar{B}A/\bar{A}.$$

因为 $|A|^2+|B|^2=|A_2|^2+|B_2|^2=1$ 以及 $A\bar{B}_2+B\bar{A}_2=0$，故知 S 矩阵为酉矩阵。▶

注 我们考虑了具有实值的谱参数 $E=k^2$ 的 Schrödinger 方程(1)。考虑复值 k 也是很有用的。这时可得出散射矩阵的酉性质与对称性对复的 k 仍成立。此外，S 具有"实性质"即 $S(-k)=\overline{S(k)}$，还有解析性：$A(k)$ 是在上半平面 $\mathrm{Im}k>0$ 中解析而在虚

轴上有有限个极点的函数的边值.

因为透射与反射系数都是可测量的，就产生了所谓散射理论的反问题，即由散射矩阵 $S(k)$ 确定势 U.

势 U 由实直线上的一个实函数或半直线上的两个实函数给出. 系数 A, B 是半轴 $k>0$ 上的两个复函数，即半轴上的四个实函数. 酉性质条件 $|A|^2+|B|^2=1$ 可以把半轴上的实函数个数由四个减少到三个.

因为 $3>2$，可以期望，并不是适合条件 $|A|^2+|B|^2=1$ 的每一对 A, B 都相应于某一个势；为了从 A, B 得出势，还需对系数再加一个条件. 解析性条件就是这样的条件.

以上所述都是一些粗略的直觉的考虑，而且是以计算任意函数的个数为基础的，但都可以成为陈述准确的. 经过证明的定理(但却超出了本书的范围)，这是多么惊人.

J. 束缚态

现在考虑紧支集的势阱 $(U(x)\leqslant 0,\ U(\infty)=0)$. 若当 $x\to\pm\infty$ 时有 $\psi\to 0$，我们就说粒子在势阱中(图37). 很明显，当粒子能量 E 为负时，它可能位于势阱中. 在阱的左方，右方，解是 $e^{\chi x}$, $e^{-\chi x}$ 的线性组合，这里 $\chi^2=-E$, $\chi>0$. 因此粒子在势阱中的条件就是，在势阱左方，x 向左时指数增长的指数函数之系数为 0，而在势阱右方，向右指数增长的指数函数的系数为 0. 并不是对一切负的能值具有这种性质的解都存在.

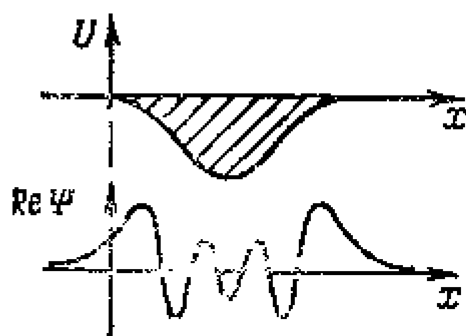


图 37

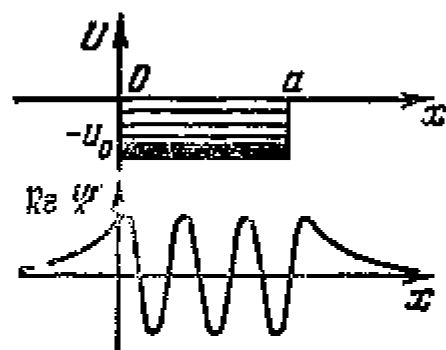


图 38

事实是，若势阱足够深且广，则存在有限多个负的能值 E 使粒子定态地位于阱中：势阱越深越大，这种能值个数也越多.

E 的这些相应的值称为**定态能级**，当 $x\to\pm\infty$，衰减的波函数 Ψ 称为**束缚态**（如果阱不具有紧支集，还要求 $\int|\Psi|^2dx<\infty$）.

问题 确定位于 $x=0$ 与 $x=a$ 之间且深为 U_0 的矩形势阱(图38)的定态能级.

答 $E=4\xi^2/a^2-U_0$，ξ 是方程

$$\cos\xi=\pm\gamma\xi,\quad \sin\xi=\pm\gamma\xi\ \left(\gamma=\frac{1}{a}\sqrt{4/U_0}\right)$$

之根(对前一方程 $\operatorname{tg}\xi>0$，对后一方程 $\operatorname{tg}\xi<0$).

问题 证明相应于不同能级的束缚态的波函数 Ψ_j 互相正交，即：

$$\int\Psi_1\bar{\Psi}_2dx=0.$$

问题 定态能级与 S 矩阵在 k 的虚轴上的极点有何联系？

§6. 二阶微分方程的几何学与三维空间中一对方向场的几何学

这里讨论二阶微分方程解的局部几何性质，即对自变量与未知量的平面的微分同胚为不变的性质.

相应于每一个二阶微分方程均有三维空间中的一对方向场. 二阶微分方程之关于平面微分同胚的局部分类问题就等价于三维空间中通有的方向场对关于空间的微分同胚的局部分类问题. 以下就考虑这两个等价问题的不变量与"标准形式".

A. 线性方程解的构形性质

方程 $d^2y/dx^2=0$ 的解的图象(直线)适合射影几何中的构形定理 (Pappus, Desargue 等定理).

定理 一切二阶齐次线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=0$$

的解的图象族局部地(即在位一点 $x=x_0$ 附近)均微分同胚于[1]最简单的方程 $d^2y/dx^2=0$ 解的图象族。

推论 射影几何的构形定理(局部地)对任意二阶齐次线性方程的解的图象均成立，例如对曲线族 $y=A\sin x+B\cos x$ 或 $y=Ae^x+Be^{-x}$ 均成立。

◀考虑在 x_0 点为 0 的解 y_1 和另一个虽在 x_0 为 0 却不恒等于 0 的解 y_2。公式

$$Y=y/y_1,\quad X=y_2/y_1$$

给出所求的微分同胚。

注 1 坐标 (X, Y) 可确定到相差一个分式线性变换(若将 y_1、y_2 换成它们的线性组合，X 与 Y 就会发生一个分式线性变换)。特别是坐标 X 在 x 轴上局部地给出一维射影流形构造(即一个图册，其中的转换函数是直线上的射影变换，即分式线性函数)。

完全相同，二阶线性齐次方程在 (x, y) 平面上给出局部射影平面构造。

注 2 把一个局部射影构造变为另一个的微分同胚称为局部射影流形的等价关系。

问题 列举出 a) 直线上，b) 圆周上的所有互不等价的局部射影流形构造。

提示 直线上所有的局部射影构造都是由将它映在射影直线(即圆)上，且导数不为 0 的映射给出的；圆上之点在此映射下原像的个数是此构造的一个不变量。

射影直线上的双叶覆盖在圆上给出一个与射影直线构造不等价的局部射影流形构造。但是并非圆上的所有局部射影构造都是由射影直线构造诱导出来的。圆上的局部射影构造的分类与 Hill 方程(具有周期系数的二阶线性方程)的分类有关。甚至常系数方程也能给出不是由射影直线诱导出的构造。

B. 二阶方程的二次部分在已知解附近的标准形式

现在我们讨论一个任意二阶非线性方程

---

1) 即有直线 $x=x_0$ 的某邻域到 (x, y) 平面上的微分同胚存在，将解的图象变为直线。

$$d^2y/dx^2 = \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \tag{1}$$

我们想考虑这方程在 (x, y) 平面上给出的两参数曲线族的几何。我们特别感兴趣的是构形定理在这族曲线中是否成立，以及能否用平面上适当的微分同胚将它拉直(即化为直线族)。我们将看到这并不一定可能，并且将给出度量"无穷小非 Desargues 性"(即破坏构形定理)的不变式。

定理　一切 (1) 形的二阶微分方程在每个线元 (x, y, p) 附近都可以用自变量与未知函数值的平面上的局部微分同胚在元素 $(x = 0, y = 0, p = 0)$ 附近化为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A(x)y^2 + O(|y|^3 + |p|^3),\quad p = \frac{dy}{dx}.$$

◀1. 消除线性项。

所给的线元确定唯一解，不妨以其图像为 x 轴。在此解附近将此方程线性化。由 §6 **A** 的定理，所得线性方程可以通过适当选择坐标系[1]被拉直 $\left(\text{即化为 } \frac{d^2y}{dx^2} = 0\right)$。在这个坐标系中，上述方程的右方 Φ 连同其对 y, p 的一阶导数均在 $y = 0$　$p = 0$ 时为 0。因此，在此坐标系中 Φ 对 y, p 的 Taylor 级数将从不低于二次的项开始:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A(x)y^2 + B(x)yp + C(x)p^2 + O(|y|^3 + |p|^3).$$

2. 自变量的变换。

考虑下式给出的 (x, y) 平面的局部微分同胚:

$$x = F(X, Y),\quad y = Y.$$

(它把坐标为 (x, y) 的点变为坐标为 (X, Y) 的点)。

引理　上述变换将方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi(x, y, p),\quad p = \frac{dy}{dx}$$

1) 以上最好是注意到，若右方 Φ 是 p 的 $n \geqslant 1$ 次多项式，则在 §6 的A所作出的坐标系中，右方仍有此性质。

变为

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \hat{\Phi}(X, Y, P), \quad P = \frac{dY}{dX},$$

其中

$$\hat{\Phi}(X, Y, P) = \frac{\Delta^3}{F'} \Phi(F, Y, P/\Delta) + \frac{F'' + 2PF'_Y + P^2 F_{YY}}{F'} P$$

$\Delta = F' + PF_Y$，“$'$”表示对 X 的偏导数，F 的导数的变元是 X 与 Y。

◀设 $y = u(x)$ 是原方程之解，$Y = U(X)$ 是其象. 则

$$P = \frac{dU}{dX} = \frac{du}{dx}\bigg|_F (F' + PF_Y), \quad \frac{du}{dx}\bigg|_{F(X, U(X))} = \frac{P}{\Delta}.$$

于是

$$\frac{d^2U}{dX^2} = \Delta \frac{d}{dX} \frac{du}{dx}\bigg|_{F(X, U(X))}$$

$$+ \frac{P}{\Delta}\left(F' + 2F'_Y P + F_{YY}P^2 + F_Y \frac{d^2U}{dX^2}\right).$$

其次

$$\frac{d}{dX} \frac{du}{dx}\bigg|_{F(X, U(X))} = \frac{d^2u}{dx^2}\bigg|_F \Delta$$

$$= \Phi\left(F(X, U(X)), U(X), \frac{P}{\Delta}\right)\Delta.$$

于是

$$\left(1 - \frac{PF_Y}{\Delta}\right)\frac{d^2U}{dX^2} = \Phi\left(F, U, \frac{P}{\Delta}\right)\Delta^2$$

$$+ \frac{P}{\Delta}(F'' + 2F'_Y P + F_{YY}P^2).$$

由此即得上述公式. ▶

由所得的公式直接可以得出

推论 1 令 $\Phi = 0$. 这时 $\hat{\Phi}$ 是对 P 不超过三次的多项式.

推论 2 设 Φ 是对 p 不超过三次的多项式，则 $\hat{\Phi}$ 也是对 P 不超过三次的多项式.

注 对于 p 次数 $n \geqslant 4$ 的多项式在变换 $\Phi \to \hat{\Phi}$ 下就已不再

变为 P 的多项式。事实上，当 $n>3$ 时，$\Delta^1(P/\Delta)^n$ 就不是 P 的多项式。

推论 3 二阶微分方程 (1) 在其每个解的图象上给出局部射影直线构造，而在其法丛上则给出局部射影平面构造。

◀考虑沿此解的变分方程。这是一个二阶齐次线性方程，因此在自变量与未知函数值的平面上有了局部射影平面构造，而在原来的解上有局部射影直线构造(见 § 6 **A**)。

用引理中的记号，变分方程形如 $\frac{d^2y}{dx^2}=\Phi_1$，$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\cdots$ 是按 y 与 p 之幂的展开式。

现在考虑所给的解在平面上的法丛。子流形在其某点上的法空间即原流形在该点的切空间对子流形在该点关于自身的切空间的商空间。子流形的法丛即在各点的法空间的并（连同它到子流形上的自然的射影）。

变分方程的解可以认为是在原方程的所考虑的解的图象的法丛中取值。

事实上，变分方程是用这样的坐标系 (x, y) 来定义的，x 轴是原来解的图象。变分方程解在一点的值即对包含平面在 x 轴上该点的 y 轴方向切向量。它在 x 轴上该点的法空间中的投影给出了法丛中的一个向量。于是变分方程的解在法丛中定义一条曲线。可证明这条曲线与用以构造它的坐标系无关；正是在这个意义下我们说变分方程可以看作是法丛中的方程。

这个论断很容易由以上引理得出。

用该引理的记号，上述论断表明，若 $F(X, 0)=X$，而 Φ_1 是 Φ 对 y，p 的 Taylor 展开式中的线性项，则 $\hat{\Phi}_1(X, Y, P)=\Phi(X, Y, P)$。此式很容易由引理中的公式得出。

于是，变分方程给出的局部射影平面构造是在法丛上的。▶

3. 未知函数的变换.

考虑 (x, y) 平面的由 $y=G(X, Z)$，$x=X$ 给出的微分同胚，它把坐标为 (x, y) 的点变为坐标为 (X, Z) 的点。

引理 在上述变换下，方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\Phi(x,y,p),\quad p=\frac{dy}{dx}$$

变为

$$\frac{d^2Z}{dX^2}=\tilde{\Phi}(X,Z,\Pi),\ \Pi=\frac{dZ}{dX},$$

$$\tilde{\Phi}(X,Z,\Pi)=\frac{1}{G_Z}[\Phi(X,G(X,Z),$$

$$G'+\Pi G_Z)-G''-2\Pi G'_Z-\Pi^2G_{ZZ}]$$

“′”表示对 X 的偏导数，G 及其导数的变元均为 X 和 Z。

◀令 $y=v(x)$ 是原方程之解，其象为 $Z=V(X)$。于是

$$\frac{dv}{dx}=G'+V'G_Z,$$

这里和以下 G 及其导数中的变元均为 X 与 $V(X)$ 又

$$\frac{d^2v}{dx^2}=G''+2G'_ZV'+G_{ZZ}V'^2+G_ZV''$$

$$=\Phi(X,G,G'+\Pi G_Z),$$

由此解出 V'' 即得引理中所给的式子。▶

由此引理立即可得

推论 1 令 $\Phi=0$，则 $\tilde{\Phi}$ 是 Π 的不高于 2 次的多项式。

推论 2 令 Φ 为 P 的 $n\geqslant 2$ 次多项式，则 $\tilde{\Phi}$ 是 Π 的不大于 n 次多项式。

4. 二次项的计算

现在考虑平面上由下式给出的局部微分同胚：

$$x=F(X,Z)=X+f(X)Z+O(|Z|^2),$$

$$y=G(X,Z)=Z+g(X)Z^2+O(|Z|^3).$$

引理 上述变换将方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\Phi(x,y,p)\quad p=\frac{dy}{dx},\ \Phi=O(|y|^2+|p^2|)$$

化为

$$\frac{d^2Z}{dX^2}=\Psi(X,Z,\Pi),\ \Pi=\frac{dZ}{dX},$$

其中

$$\Psi(X,Z,\Pi)=\Phi(X,Z,\Pi)+\Omega(X,Z,\Pi)$$
$$+O(|Z|^3+|\Pi|^3),$$
$$\Omega=\alpha Z^2+\beta Z\Pi+\gamma\Pi^2,$$
$$\alpha=-g'',\ \beta=-4g'+f'',\ \gamma=-2g+2f'.$$

f，g 及其导数的变元均为 X。

◀依次应用关于自变量和未知函数变换的引理即可得证。将所得公式的右方展为 (Z,Π) 的级数并只保留平方项，即得作为 Φ 的二次项的补充之 Ω 的表达式。▶

5. 二次项的化简

记原来右方 Φ 的二次项为

$$\Phi_2=Ay^2+Byp+Cp^2.$$

变换后的方程右方的二次项将是

$$\Psi_2=(A-g'')Z^2+(B-4g'+f'')Z\Pi+(C-2g+2f')\Pi^2$$

(A, B, C, f, g 及其导数的变元均为 X。沿着所考虑的解，X 即为 x)。直接可以得到

引理 由 Φ_2 变到 Ψ_2 时，下面的量不变：

$$I=6A-2B'+C''.$$

选取任意函数 f 与 g 可以使 A, B, C 等三个系数中有二为 0 (但 I 保持不变)。特别是取适当的 f 和 g 使 $4g'-f''=B$，$2g-2'f=C$，即得 $\Psi_2=\bar{A}Z^2$，$\bar{A}=I/6$。至此定理证毕。▶

C. 无穷小非 Desargue 性质

使二阶微分方程在其解之图象附近化为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A(x)y^2+O(|y|^3+|p|^3),\ p=\frac{dy}{dx}$$

的坐标系并非唯一的。现在我们研究，阻碍将解族拉直而且度量在某点某方向的无穷小非 Desargue 性的 $A(x)$，在多大程度上是不变的(即不依赖于化标准形的方法)。

定理 沿着零解的图象，5/2 阶微分形式

$$\omega = A(x)|dx|^{3/2}$$

除最多相差一个常数因子外是不变的。

换言之，设 (X, Y) 是另一坐标系，使方程在其下仍为标准形，而且 $y=0$ 相应于 $Y=0$，系数 $A(x)$ 变成 $A(X)$，则

$$\bar{A}(X) = CA(x)\left|\frac{dx}{dX}\right|^{\frac{3}{2}},$$

其中 C 与 x 无关。

我们将称 ω 为**沿所给解的非 Desargue 性形式**。

◀使轴 $y=0$ 不变的最一般的微分同胚将把点 (x, y) 变为

$$X = f_0(x) + yf_1(x) + \cdots, \quad Y = yg_1(x) + y^2g_2(x) + \cdots.$$

在 x 点以 ξ 为 y 方向分量的法丛中的向量将变为在 $f_0(x)$ 点以 $g_1(x)\xi$ 为 y 分量的向量。

法丛的射影构造是不变地确定的(见 §6 **B**)；因此若由微分同胚 $(x, y)\longmapsto(X, Y)$ 作出的变换 $(x, \xi)\longmapsto(f_0(x), g_1(x)\xi)$ 将标准形的方程化为另一个有标准形的方程，它必定是射影变换。因此可得

$$f_0(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad g_1(x) = \frac{C}{cx+d}.$$

每一个使 $y=0$ 不变而且保持法丛的射影构造的微分同胚均可表为一个特殊的微分同胚

$$X = f_0(x), \quad Y = yg_1(x)$$

以及一个逐点保持法向纤维的微分同胚

$$(X, Y)\longmapsto(X + Yf_1(X) + \cdots, \ Y + Y^2g_2(X) + \cdots)$$

之积。

后面一个微分同胚又可表为 §6 **B** 中考虑过的自变量或因变量的变换之积。所以由方程右方对 y 与 p 为二次的各项所成的不变量 I (见 §6. **B** 的 5) 在此微分同胚下不变。

现在研究在特殊的射影变换下 I 的性态。

直线上的所有射影变换均可表为平移，伸缩与变换 $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ 之积。

I 在平移下是不变的，在 x 与 y 的伸缩之下只被乘上一个常数。所以只需考查它在变换 $x = \frac{1}{X}$，$y = \frac{Y}{X}$ 下的性态。

计算导数 $P = \frac{dY}{dX}$ 和 $\frac{dP}{dX} = \frac{d^2Y}{dX^2}$，即有 $P = y - px$，

$$\frac{dP}{dX} = X^{-3} \frac{dP}{dx}\left(p = \frac{dy}{dx}\right).$$

因此

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = X^{-3}A\left(\frac{1}{X}\right)\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + O(|Y|^3 + |P|^3).$$

所以 Y^2 的系数是 $X^{-3}A(x)$。▶

D. 标量不变量的构造

由以上定义的微分形式 ω 可以得到一些不变地联系于方程的标量不变量。

首先要注意，对一维流形上每个任意次的微分形式都可以不变地作出一个向量场，在每一点上此形式在场中向量上之值均为 1。

例如，与微分形式 $A(x)(dx)^{3/2}$ 不变地相联系的向量场是 $v(x)\frac{\partial}{\partial x}$，其中 $v(x) = A(x)^{-2/3}$。

定理　设 $v(x)\frac{\partial}{\partial x}$ 是直线上的向量场。以下的标量函数均对直线的射影变换与该场不变地相联系：

$$I_2 = 2v''v - v'^2,\ I_3 = 2v'''v^2, \cdots,\ I_n = vI'_{n-1}, \cdots,$$

其中“′”表示对 x 求导。

◀容易直接计算检验 I_2 的不变性，因为只需考虑变换 $x = \frac{1}{X}$，它对平移与伸缩的不变性是显然的。函数沿已给向量场的导数与函数及场的联系不在仅射影变换下，而且对直线的一切微分同胚，都是不变的。所以由 I_2 的不变性可得一切 I_n 的不变性。▶

注 1 不变量 I_2 还可以用下法作出。直线的射影群的 Lie 代数由 $\frac{\partial}{\partial x}$, $x\frac{\partial}{\partial x}$, $x^2\frac{\partial}{\partial x}$ 生成[1]。所以直线上的任一向量场在每一点均可用射影向量场(即射影群的 Lie 代数中的向量场)逼近到二阶为止。

在射影变换下，在某一点逼近一个场的射影场变为在象点逼近新向量场的射影场。直线上的射影变换对射影场所成的三维空间的作用就是射影群对其 Lie 代数的伴随作用。但是这作用可以保持代数上的二次形不变。事实上，若用二阶矩阵来表示射影变换，用相应的单参数群的生成算子之矩阵来表示射影场，则变换 g 对场 v 的作用可用矩阵之积 gvg^{-1} 来表示。但是由于 $\det gvg^{-1}=\det v$，所以矩阵 v 的行列式是射影场的 Lie 代数上的二次形且关于伴随表示不变。所以就射影场来计算的此行列式，这个射影场逼近已给的场，是一个与所给的场相关的标量且在射影变换下不变。

逼近已给场的射影场，在上述 Lie 代数基底下，分量为 $(v, v', v''/2)$。故相应的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} v'/2 & v \\ -v''/2 & -v'/2 \end{pmatrix};$$

其行列式除相差一个不重要的因子以外即为 I_2。

注 2 显然，所有含 v 及其导数的函数 (多项式，级数等等)，只要是关于射影变换不变地联系于场 v 的，均可用上面作出的不变量 I_k 来表示。

注 3 射影直线上函数的射影不变量都可以用下法作出:

---

1) 相应的射影变换的单参数群在仿射坐标下形如 $g^tx=x+t$, $g^tx=e^tx$, $g^tx=\frac{x}{1-tx}$，因此在齐次坐标下由二阶么模矩阵 $\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\exp(t/2) & 0\\ 0 & \exp(-t/2)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -t & 0\end{pmatrix}$ 给出。所以生成算子的矩阵是 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

对函数先作微分(它是 1- 形式)，对此形式作出其场，而对其场则作出不变量 I_k。特别地，函数 f 在自变量的射影变换下最简单的不变量是

$$I_2[f]=\frac{2f'f'''-3f''^2}{f'^4}.$$

它与 Schwartz 导数在分母上多一个因子 f'^2，后者对函数值的射影变换不变。

注 4 若将向量场乘以 λ，则以上作出的不变量 $I_2, I_3, \cdots$ 将分别乘以 $\lambda^2, \lambda^3, \cdots$。由此很容易作出其组合使得：当乘以 λ 时，场不变，例如，$J=I_2^3/I_3^2$。

相应于由 $\frac{5}{2}$-场 ω 作出的场 v 的量 J，它是平面上线元空间的标量函数，它与坐标的选择无关，而只依赖于原来的二阶微分方程。

E. 关于导数为三次的方程

上面作的非 Desargue 性形式 ω 沿任意解为 0，它是方程可以化直$\left(\text{即化为}\ \frac{d^2y}{dx^2}=0\right)$的必要条件，但是我们就会看到，这并非充分的。

定理 1 设微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\Phi(x,y,p)\quad\left(p=\frac{dy}{dx}\right)$$

可用平面上的微分同胚化为 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$。这时 Φ 必为对 p 不超过三次的多项式。

换言之，平面上任意直线族的微分方程，不论用什么曲线坐标来写，右方均为一阶导数的不超过三次的多项式。

定理 1 可由下面的令人惊奇的事实得出：

定理 2 设微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\Phi(x,y,p)$$

的右方是 p 的不超过三次的多项式。在平面上的任意微分同胚下，它仍变为同样形状的微分方程，即其右方是一阶导数的不超过三次的多项式。

◀ 定理 2 可由 §6 **B** 中关于自变量与未知函数变换对方程右方作用的引理得出(见 §6 **B** 引理)，因为平面上任意局部微分同胚均可由依次作这种变换而得。▶

◀由定理 2 以及 0 是 p 的不超过 3 次的多项式得出。▶

问题 对方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a_0y'^3-a_1y'^2+b_1y'-b_0$$

(a_i, b_i 都是 x, y 的函数)作变换 $(x, y)\mapsto(y, x)$.

答

$$\frac{d^2x}{dy^2}=b_0x'^3-b_1x'^2+a_1x-a_0.$$

注 可以证明，条件 $\omega\equiv 0$ 和 $\frac{d^4\Phi}{dp^4}\equiv 0$ 是独立的。所以条件 $\omega\equiv 0$ 对方程可以化为 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 并非充分的。

$\left\{\omega\equiv 0,\ \frac{d^4\Phi}{dp^4}\equiv 0\right\}$ 这两个条件在一起对方程可以化为 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 是充分的。这一点可由 §6 **B** 中的公式(稍经计算)得到。

问题 证明任一微分方程局部地(即在点 $x=0$ 与解 $y=0$ 附近)化为 $\frac{d^2y}{dx^2}=p^2B(x, y, p)$, $p=\frac{dy}{dx}$.

F. 三维空间中一对方向场的几何学

考虑三维空间中一对方向场。在通有情况下，其局部分类(可相差空间的微分同胚)等价于二阶微分方程的局部分类(可相差自变量-未知函数平面的微分同胚；局部是指在一指定点与指定方向的附近)。

首先对三维空间这一对方向场作平面上一个双参数曲线族。

为此，先用空间的局部微分同胚把第一个场拉直，即把它的积

分曲线化为铅直的平行直线族．然后再沿着这族铅直直线把第二个场的积分曲线投影到水平平面上．在水平平面（即空间对第个场的积分曲线的商平面）上即得到一个双参数曲线族．

现在对这个双参数曲线族作二阶微分方程使这些曲线成为其解的图象．

为此首先要看到对通有的平面上局部双参数曲线族，在平面上族中曲线的每个线元(即一点及其切线方向)附近，通过每一点以及每一方向均有族中唯一曲线(为此需要某个 Jacobi 行列式不为 0)．

若一个曲线族是上述的通有曲线族，(x, y) 是平面上的坐标，则在族中曲线上 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 之值是所述线元的$\left(\text{亦即 } x, y, \frac{dy}{dx} \text{ 的}\right)$光滑函数．这样我们得到一个二阶微分方程，$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$．由唯一性定理，它的解的图象就是族中的曲线．

这样，我们就在某种非蜕化条件下，即要求相应的 Jacobi 行列式不为 0，对于三维空间中的一对方向场，作出了一个二阶微分方程．

定义　三维空间中的方向场称为对铅直直线为非蜕化的，如果场中的方向处处均非铅直，而且当一点沿铅直直线运动时，场中方向的水平分量以非 0 速度旋转．

三维空间中的一对方向场称为非蜕化的，如果在用微分同胚使第一个方向场拉直后，第二个方向场关于它是非蜕化的．

注　不难看到，这个定义是合理的：若在第一个方向场经某个微分同胚拉直后，第二个方向场关于它是非蜕化的，则在用任意微分同胚将第一个方向场拉直后，情况仍然如此．不难验证，在互换两个方向场后，一对方向场的非蜕化性仍然保持(就是说，拉直哪一个方向场都一样)．

以上我们对三维空间中一对非蜕化的局部方向场作出了一个

二阶微分方程。事实上，非蜕化条件就是 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(y, y')}{\partial(u, v)}$ 不等于 0，这里 (u, v) 是曲线族的参数。现在要证明，这种对应性建立了 $\mathbf{R}^3$ 中一对方向场的局部分类和二阶微分方程的局部分类的完全等价性。

定理 每一个二阶微分方程都可用上述作法由三维空间中一对适当的非蜕化方向场得出。

若两对方向场可以用空间的微分同胚互变，则相应的微分方向也可用平面上的微分同胚互变。反之，若两个二阶微分方程可以用平面的微分同胚互变，则相应的两对方向场也可用空间的微分同胚互变。

这样可以由方程唯一地作出一对方向场（在相差空间的一个微分同胚的意义下）。

◀对每一个方程 $\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$，在坐标为 (x, y, p) 的三维一阶节空间中考虑 p 方向的《铅直》直线族 $(x = \text{const}, y = \text{const})$ 与等价于原方程的方程组 $\frac{dy}{dx} = p$，$\frac{dp}{dx} = \Phi$ 的积分曲线族。

沿铅直方向投影即得原方程解的图象族。因此对每个方程作一对方向场，而原方程即可由此得出。

反之，水平平面的微分同胚也对平面曲线的线元(即方向)有作用。因此把一个方程变为另一个的微分同胚，决定了三维空间中的一个微分同胚，把第一对方向场变为另一对(对第一个空间中的一点相应有平面上一条曲线的线元；微分同胚将此线元变到新的位置，这样得到的线元就是第二对的第二个方向场在第二个空间中的唯一点上的方向之投影；即以此点对应于原来的点)。▶

由所证的定理得知，上述所有有关二阶微分方程的解族的几何结果，都可用三维空间中一对非蜕化方向场的几何语言来陈述(如果愿意，可用(含有两个一阶隐式方程的)方程组最简单情况下

的几何语言来陈述，这时，导数为坐标的二值函数时是这样）。

还要注意，非蜕化的方向场对在三维空间中给出一个接触构造（这是完全不可积的平面场，这些平面由所给方向场张成，详见第二章）。所给场的积分曲线在这个构造的意义下组成 Legendre 从[1]。所以我们也能将前述的结果重述为关于 R^3 中一对 Legendre 从的几何学的结果。

G. 对偶性

以上我们对三维空间中的每一个非蜕化的方向场对作出了一个二阶微分方程，其间，拉直了一个场并将第二个场的积分曲线作了投影。然而也可以反过来作：拉直第二个场并将第一个场的积分曲线投影。结果，一般而言会得出另一个二阶方程。

这样每一个二阶微分方程都有对偶的方程。

用三维空间中的方向场对的语言来说，化为对偶方程即将一对方向场互相掉换位置。对偶方程的另一种描述法如下：设 $y(x)$ 的二阶方程含有两个参数的解族为 $F(x, y; u, v) = 0$。现以 x，y 为参数，而 u，v 为变量。于是上式定义了函数 $v(u)$ 含两个参数的族。它是一个二阶微分方程的解族；这个方程对偶于原方程。

问题 证明二阶方程的非 Desargue 性形式 ω（见 §6 B）恒为 0，当且仅当对偶方程的右方是一阶导数的不高于三次的多项式。

这样，二阶方程可以拉直的条件可陈述为

方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \Phi\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right)$ **可化为** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ **当且仅当此方程及其对偶方程的右方都是一阶导数的不高于三次的多项式。**

H. 综述

二阶方程的几何学是好几个数学理论的来源。

1. Lie 的一个学生 A. Tresse 在其学位论文 "Determination

1) 接触构造的 Legendre 子流形丛即维数最大的积分子流形。Legendre 丛即具有 Legendre 纤维的丛。

des invaviants punctuel de l'equation differentielle ordinaire de second ordre" Leipzig, 1896（又见 A. Tresse [1]）中作出了方程的所有"半不变量."

所谓k阶半不变量的定义就是一个函数在(x, y, p)点之值，此函数依赖于方程右方及不高于k阶的导数．若某个方程的k阶半不变量在此线元素的三维空间的一点为0，则对经过平面的微分同胚变出的方程，它在变换后的线元素上也为0．

事实表明，恰好有两个函数独立的四阶半不变量．其一是$\frac{\partial^4\Phi}{\partial p^4}$，另一个是由无穷小非 Desargue 性形式$\omega$作出的标量不变量$I_2$（见 § 6 D）．对于标准形方程$\frac{d^2y}{dx^2}=A(x)y^2+O(|y|^3+|p|^3)$，有

$$I_2=2v''v-v'^2,\quad v=A^{-2/5};$$

因此$5AA''-6A'^2$是半不变量．

Tresse 还找到三个5阶半不变量，而对$k>5$，还有$\frac{k^2-k-8}{2}$个k阶半不变量；所有其余的半不变量都是它们的函数．Tresse 也证明了所有的半不变量都可以"从三个最简单的出发"用微分作出．

2. 二阶微分方程的几何学这个问题也引导 E. Cantan 到射影连络流形的理论(见 E. Cantan [1])．

流形上的射影连络就是对于流形上每一个光滑路径给出一个射影变换．将路径起点处的切空间映入终点处的切空间，而且光滑地依赖于路径[1]．特别是闭路径对应于起点处的切空间的射影变换，而绕过"无穷小平行四边形"相应于"无穷小射影变换"，称为连络的曲率形式．

如果当绕过一个闭路时，切空间的原点仍为原点，则此射影连络称为无扭的 (torsion free)．在一切无扭连络中，Cartan 选出

1）还要满足某些自然的条件，对此不再叙述．

了标准连络．在二维情况下连络的标准性即指，过切平面原点的任一直线在绕过一个闭路后仍变为自身．

流形上一曲线若其切线沿此曲线位移后仍成为切线，就称它为此连络的曲率线．

事实表明，平面上无扭射影连络的曲率线是某二阶微分方程解的图象，此方程右方是一阶导数不超过三次的多项式．反之，若一个二阶微分方程是上述不超过三次的多项式，则必存在一个标准的无扭射影连络使其曲率线正是解的图象．

对于一般的二阶方程，Cartan 也作出了唯一的标准无扭射影连络，但二维平面的平移现在是用沿线元的三维空间中的路程来定义的(详见上引 Cartan 的工作)．

3. Tresse 的理论由 Bol [1] 翻译为空间中的方向场对的语言．

在这个理论中，轨道空间的问题明显地仍未解决，特别地，在 k 阶节空间的通有点的附近，需要多少参数才能刻划出二阶方程的 k 阶节的轨道(即平面微分同胚群对方程的 k 阶节作用之轨道)仍未解决．

第二章　一阶偏微分方程

我们对偏微分方程的研究要比对常微分方程的研究落后得多。这个理论的一部分——一阶偏微分方程理论，将偏微分方程化为研究一种特殊的常微分方程组即特征方程组。二者之间的这一联系的本质就是：由互不作用的粒子组成的连续介质既可以用场的偏微分方程来描述，又可用粒子的常微分方程来描述。

我们将在本章中讨论这一理论（数学上化为所谓接触构造的几何学）。我们也将考虑超平面场的可积性问题（Frobenius定理）。

§7.　一阶线性与拟线性偏微分方程

一阶偏微分方程的求积可以化为求积一个常微分方程组——所谓特征方程组。这种化法的基础是一个简单的几何想法，即曲面可以由曲线族组成。我们就从这些几何思想开始再把它们应用到偏微分方程上。

A.　方向场的积分曲面

令 X 为一光滑流形，V 为 X 上的方向场。

定义　光滑子流形 $Y\subset X$ 称为场 V 的积分曲面，如果 Y 在每一点的切平面都包含场 V 的方向（图 39）。

定理　子流形 $Y\subset X$ 是场 V 的积分曲面当且仅当此曲面在其每一点都包含一小段过该点的积分曲线。

◀定理的论断都是局部的，而且在微分同胚下不变。所以我们只需对线性空间中的平行方向这个标准的方向场证明即可。但这时定理的论断是显然的（它化为这样的事实，给定在一个区间上的函数，当且仅当其导数恒为 0 时，才为常数，图 40）。▶

设Γ为n维流形X的k维子流形(图 41)。若 $k=n-1$, 则Γ称为超曲面。

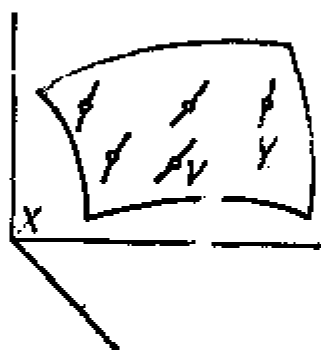


图 39

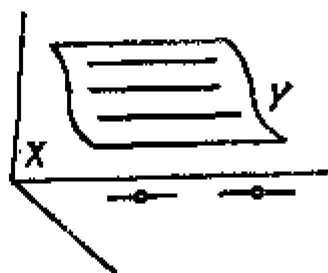


图 40

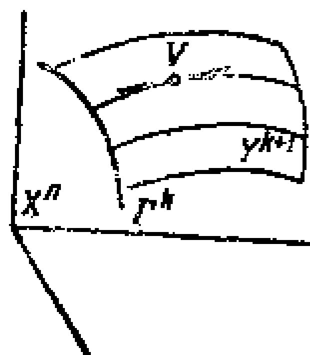


图 41

定义　方向场V的以Γ为初始流形的 Cauchy 问题，是求场V的$k+1$维积分子流形，使之包含Γ。

注意，经过Γ上各点的积分曲线在Γ附近并不总能组成子流形，甚至局部地也不行(图 42)。

定义　初始流形上的点称为场V的特征点，如果场V在此点的方向切于初始流形。

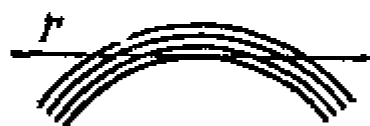


图 42

定理　设在k维初始流形上有对场V为非特征的点。这时必有场的$k+1$维积分曲面包含初始流形上此点的一个邻域。这个积分曲面在下述意义下是唯一的，即任意两个包含该点在初始流形上一个邻域的积分曲面必在该点的某邻域中重合。

◀这一论断是局部的且在微分同胚下不变。所以只需对线性空间中的平行场来证明它即可。这时论断是明显的(为什么?)。▶

B. 一阶齐次线性方程

定义　一阶齐次线性方程即方程

$$L_a u=0, \tag{1}$$

a是流形M上的已给向量场。

设场a在坐标$(x_1,\cdots,x_n)$下的分量是$(a_1,\cdots,a_n)$；每个分量都是坐标的函数。这时方程(1)可以写为

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+a_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0. \tag{2}$$

定义 场 a 称为方程 (1) 的特征向量场，其相曲线称为特征曲线。方程 $\dot{x}=a(x)$ 称为偏微分方程 (1) 的特征方程。

定理 函数 u 是一阶齐次线性方程 (1) 的解当且仅当它是特征方程的初积分。

◀这就是初积分的定义。▶

定义 方程 (1) 的 Cauchy 问题即求其一解 u、使之适合条件 $u|_\gamma=\varphi$，γ 是 M 中的一个光滑超曲面，而 φ 是此超曲面上的函数。

超曲面 γ 称为初始超曲面，函数 φ 称为初始条件。

要注意，这个问题并不一定有解。事实上，沿着每个特征曲线解 u 取常值。但特征曲线可以与 γ 相交好几次。如果所给的函数 φ 在这些点处取不同值，则相应的 Cauchy 问题在任意的包含此特征曲线的区域中均无解(图 43)。

定义 初始曲面 γ 上的点 x 称为非特征点，如果过此点的特征曲线横截(即不切于)初始超曲面。

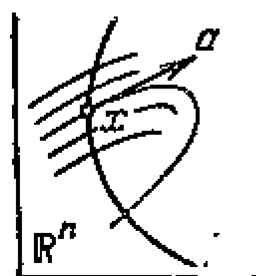


图 43

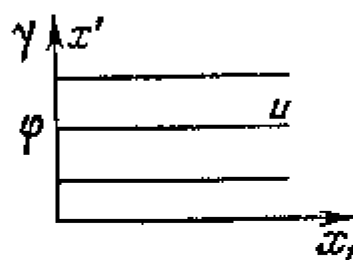


图 44

定理 若 x 是初始超曲面上的非特征点，则它有一邻域使方程 (1) 的 Cauchy 问题在其中有解，而且解为唯一的。

◀由关于拉直一个向量场的定理，可在 x 附近选一个坐标，使场 a 的分量为 $(1, 0,\cdots, 0)$ 而 γ 的方程为 $x_1=0$ (图 44)。

在此坐标下，Cauchy 问题成为

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=0,\quad u|_{x_1=0}=\varphi. \tag{3}$$

(在一个凸区域中)唯一解是 $u(x_1, x')=\varphi(x')$, $x'=(x_2,\cdots, x_n)$. ▶

注 任意常微分方程的解构成一个有限维流形：每一个解都可由选择有限多个初始条件来给出。在含一个 n 元未知函数的一阶齐次线性偏微分方程情况下，我们看到"有多少个 $n-1$ 元函数，就有多少个解"。

我们以后会看到，对于一般的一阶偏微分方程也有类似的现象。

C. 一阶非齐次线性方程

定义 一阶非齐次线性方程就是方程

$$L_a u = b, \tag{4}$$

其中 a 是流形 M 上的已给的方向场，b 是 M 上的已知函数。用坐标的写法即

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+a_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=b, \tag{5}$$

$a_k=a_k(x_1,\cdots,x_n)$，$b=b(x_1,\cdots,x_n)$。

方程 (4) 的 Cauchy 问题的提法和方程 (1) 一样。

定理 在初始超曲面 γ 的任一个非特征点 x_0 的充分小邻域内，方程 (4) 的 Cauchy 问题有解，且是唯一的；它可以写为

$$u(g(x,t))=\varphi(x)+\int_0^t b(g(x,\tau))d\tau,$$

$g(x,t)$ 是特征方程的解(在初始超曲面上有初始值 $g(x,0)=x$)在时刻 t 之值。

◀将场 a 拉直后就得到问题

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=b,\ u|_{x_1=0}=\varphi(x').$$

其唯一解是

$$u(x_1,x')=\varphi(x')+\int_0^{x_1} b(\xi,x')d\xi\ ▶$$

换言之，方程 (4) 表明，解沿特征曲线的导数是已知函数 b，

解在一段特征曲线上的增量恰好是函数 b 在这一段特征曲线上的积分(图 45)。



图 45

D. 一阶拟线性方程

定义 一阶拟线性方程即方程

$$L_\alpha u = \beta, \tag{6}$$

这里 $\alpha(x) = a(x, u(x))$, $\beta(x) = b(x, u(x))$。 x 是流形M 上的点，u 是流形M 上的函数，a 是已给的切于M的向量，它还依赖于一个参数 $u \in \mathbb{R}$，而 u 又依赖于点x，b 则是$M \times \mathbb{R} = J^0(M, \mathbb{R})$ 上的函数。

方程 (6) 可以用坐标写为

$$a_1(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x, u). \tag{7}$$

它和线性方程的区别只是在于系数 a_k 和 b 还含未知函数。

例 考虑依惯性而在直线上运动从而每个粒子速度为常数的粒子所成的一维介质. 记时刻 t 位于点 x 处的粒子的速度为 $u(x, t)$. 写出 Newton 运动方程：粒子加速度为0. 若 $x = \varphi(t)$ 是粒子的运动，则 $\dot\varphi = u(\varphi(t), t)$ 而

$$\ddot\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}\dot\varphi + \frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

因此，互相无作用的粒子所成介质的速度场 u 满足拟线性方程

$$uu_x + u_t = 0. \tag{8}$$

问题 若函数 $u(\cdot, 0)$ 的图象如图 46 所示，作 $u(\cdot, t)$ 的图象.

答 见图 47. 当 $t \geq t_1$ 时不存在光滑解. 自此时刻起，介质中的粒子互相碰撞(此时，惯性运动这一物理条件，即粒子无相互作用，不反映实际，因

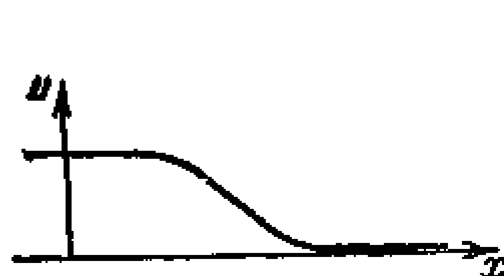


图 46

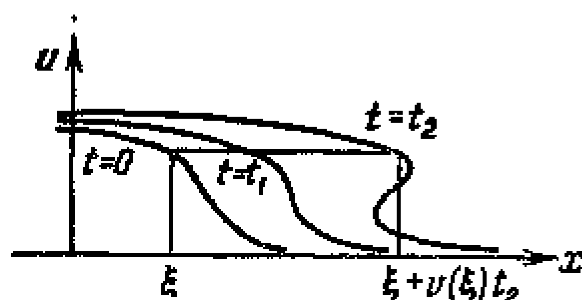


图 47

此应该用其它物理条件以描述碰撞性质。产生了所谓激波——即图 48 那样形状的函数，方程(8)在间断面外满足，而在间断面上则满足附加的来自物理的条件)。

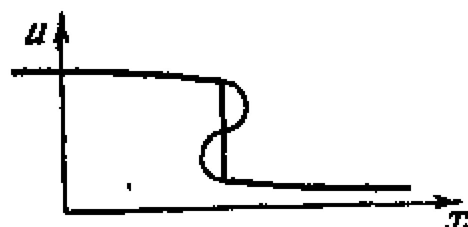


图 48

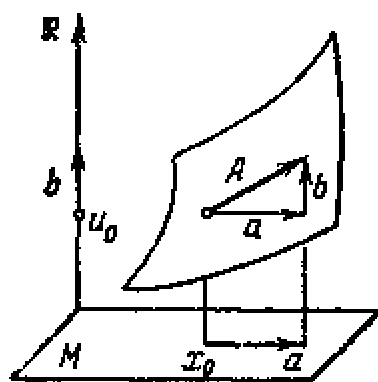


图 49

E. 一阶拟线性方程的特征

上面我们看到，对特殊的拟线性方程(8)，由速度场转到粒子运动何等有用。对一般的方程(6)也可做类似的事。这时，在未知函数定义域与值域的乘积空间中的某些曲线起了粒子运动的作用；它们称为拟线性方程的特征曲线。

一个未知函数 $u: M\to\mathbb{R}$ 的拟线性方程(6)

$$L_{a(x,u(x))}u=b(x,u(x)),\tag{6}$$

意味着若点 x 由 x_0 出发并在 M 上开始时以速度 $a(x_0,u_0)$ 运动，则解之值从 $u=u_0$ 开始以速度 $b(x_0,u_0)$ 变化。

换言之，作出在空间 $M\times\mathbb{R}$ 中的点 (x_0,u_0)，并具有沿 M 的分量 $a(x,u_0)$ 和沿 $\mathbb{R}$ 的分量 $b(x_0,u_0)$ 的向量 $A(x_0,u_0)$，切于

解的图象(图 49)。

定义 向量 $A(x_0, u_0)$ 称为方程(6)在 (x_0, u_0) 点的特征向量。在空间 $M\times\mathbf{R}$ 之各点上的特征向量组成向量场 A。它称为拟线性方程(6)的特征向量场。特征向量场的相曲线称为拟线性方程的特征曲线。

由相速度场 A 给出的微分方程称为特征方程。

例 设 M 为具有坐标 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的 $\mathbf{R}^n$。特征场由其分量给出；它们在 (x, u) 点之值为

$$a_1(x, u), \cdots, a_n(x, u); b(x, u).$$

特征方程是

$$\dot{x}_1 = a_1(x, u), \cdots, \dot{x}_n = a_n(x, u); \ \dot{u} = b(x, u).$$

问题 求无相互作用粒子的介质 $uu_x + u_t = 0$ 的特征方程。

答 $\dot{x} = u$, $\dot{t} = 1$, $\dot{u} = 0$。特征曲线是 $x = at + b$, $u = a$。

注 线性方程虽是拟线性方程的特例，它的特征曲线，若作为拟线性方程来看却与线性方程的特征曲线不同：线性方程的特征曲线在 M 中，而拟线性方程的特征曲线却在 $M\times\mathbf{R}$ 中。线性方程的特征曲线是它作为拟线性方程的特征曲线由 $M\times\mathbf{R}$ 到 M 上的投影。

F. 一阶拟线性方程的求积

设 A 为拟线性方程(6)的特征向量场。设它处处非零。这时它定义一个方向场。

定义 拟线性方程的特征向量场所成的方向场称为其特征方向场。

拟线性方程的特征曲线就是这个方向场的积分曲线。

例 在 $M = \mathbf{R}^n$ 且有坐标 $(x_1, \cdots, x_n)$ 时，特征方程常写为所谓对称形式，如

$$\frac{dx_1}{a_1} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b},$$

它表明特征曲线之切线与特征向量共线。

定理 函数 u 当且仅当其图象为特征方向场的积分曲面

时，才是拟线性方程的解。

◀这是显然的，因为方程(6)正表明图象与特征向量相切。▶

推论 函数 u 是拟线性方程的解，当且仅当其图象对其上每一点均包含一段过此点的特征曲线。

◀见§7 A.▶

于是求积拟线性方程就化为求其特征曲线。知道了特征曲线，只需再由它组成一个曲面而为一函数的图象：这个函数就是拟线性方程的解，所有的解均可这样得出。

G. 一阶拟线性方程的 Cauchy 问题

令 $\gamma\subset M$ 为流形 M 中的一超曲面(即余维数为 1 的子流形)。而 $\varphi:\gamma\to R$ 为一光滑函数(图 50)。

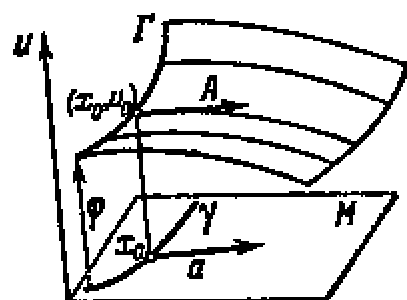


图 50

定义 拟线性方程(6)在 γ 上具有初值 φ 的 Cauchy 问题即求一解 u，使它在 γ 上等于 φ。

这个问题的求解容易化为求解特征方向场的 Cauchy 问题。

考虑函数 $\varphi:\gamma\to\mathbf{R}$ 的图象。它是乘积空间 $\gamma\times\mathbf{R}$ 中的超曲面。因为 γ 嵌入在 M 中，可将函数 φ 的图象 Γ 看作 $M\times\mathbf{R}$ 的子流形(余维数 2)(图 50)。

定义 γ 上的初值 φ 的初始子流形 $\Gamma\subset M\times\mathbf{R}$ 即 φ 在 γ 上的图象。

这样，初始子流形 Γ 既给出 M 中的超曲面 γ，又给出 γ 上的初始条件 φ。

定义 初始条件 (γ,φ) 称为在 γ 上的 x_0 点对拟线性方程(6)为非特征的，若向量 $a(x_0,u_0)(u_0=\varphi(x_0))$ 在此点不切于曲面 γ(图 50)。

注 若方程为线性的，向量 $a(x_0,u_0)$ 不含 u_0，可以定义曲面 γ 上的非特征点。对拟线性方程，则点 $(x_0,u_0)\in\Gamma$ 可以是特征点或非特征点，而讨论 $x_0\in\gamma$ 是否特征点是不合适的。

定理 拟线性方程(6)若有在 x_0 的非特征初始条件，则在此点附近解存在而且局部唯一。

◀由初始条件在 x_0 点的非特征性可得:

1) 特征场 A 在点 (x_0, u_0) 附近不为 0。因此在此点附近可定义光滑的特征方向场。

2) 特征方向在该点不切于初始流形 Γ，从而在该点附近亦如此。因此特征方向场的含初始流形 Γ 的局部积分曲面唯一存在(见 § 7**A**)。

3) 积分曲面在 (x_0, u_0) 点的切平面是非铅直的(即不含 u 轴)。所以积分曲面是一个函数的图象。此函数即所求解(见 § 7**F**)。▶

注 证明中也包含了拟线性方程 Cauchy 问题解的构造程序。

§ 8. 一阶非线性偏微分方程

一阶非线性偏微分方程也和线性方程一样可用特征来求解。但是如果说 M 上函数的线性方程之特征在 M 上，拟线性方程的特征在 $M\times\mathbf{R}$ 上，则一般的一阶非线性偏微分方程的特征却在函数的 1 阶节流形 $J^1(M, \mathbf{R})$ 上。

1 阶节流形有自然的接触构造。

一阶非线性偏微分方程的求积法就是基于接触构造几何学的一些简单事实的，我们就从这里开始。

A. 接触流形

接触流形就是切空间具有适合“极大不可积性”的超平面场的流形。

平面场(与一维方向场不同)不一定有与平面维数相同的积分曲面。为了说明超平面场有积分超曲面的障碍所在，可按下法进行。

在流形上要考查的点 O 附近引入坐标使 O 点处场中的平面成

为一坐标超平面，并称相应的坐标为**水平坐标**，其余坐标轴称为**铅直坐标轴**。

对水平平面上任一路径作具有铅直母线的柱面。超平面场在柱的侧面上的迹成为柱面上的方向场。积分曲面(如果存在的话)与柱面的交线则是这个方向场的积分曲线(图 51)。

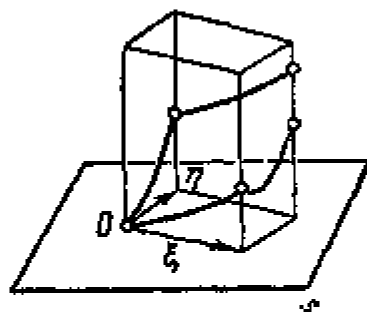


图 51

这样即可将水平平面的任一路径提升到所求的积分曲面上来。

设 (ξ, η) 是水平坐标平面在所述点处的两个向量。考虑它们所张成的平形四边形。由该点向相对的顶点沿平行四边形之边作两条路径。提升这两条路径则将在相对顶点上方一般地得到两个相异的点。它们不重合正是作积分超曲面的障碍，也就是超平面场"可积性"的障碍。

考虑所得的两点之铅直坐标差。它的关于 ξ 与 η 的双线性的主要部分正是场的不可积性的度量。现按以下作法给出正式的定义。

流形上的切超平面场可由一个 1 次形式 α 局部地给出，α 处处非 0 而且确定到可能相差一个处处非 0 的函数因子：场中的超平面即此形式之零空间（即形式在其上值为 0 的切空间的子空间）。

例 考虑坐标为 $(x_1, \cdots, x_n; u; p_1, \cdots, p_n)$ 的空间 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中的 1 次形式 $\alpha = du - pdx$。α 在 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中处处不为 0，从而在 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中给出一个 $2n$ 维平面场 $\alpha = 0$（图 52）。

定义 流形M上的一个处处非 0 的 1 次微分形式 α，若其外微分 $d\alpha$ 在曲面 $\alpha = 0$ 之每个切平面上定义一个非退化的 2 次微分形式，则称它为**接触形式**。

双线性形式 $\omega: L \times L \to \mathbf{R}$ 为非退化的，若 $\forall \xi \in L \backslash 0$，$\exists \eta \in L$：$\omega(\xi, \eta) \neq 0$。

线性空间上的非退化斜对称 2 次形式也称为一个**辛构造**。

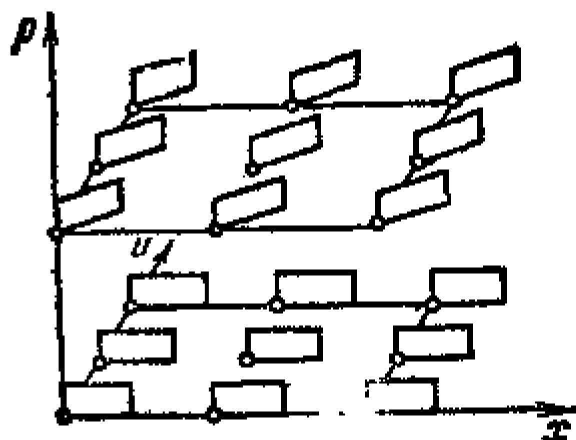


图 52

例 前例中作出的形式是接触形式. 事实上,其外微分为

$$dx_1\wedge dp_1+\cdots+dx_n\wedge dp_n.$$

在曲面 $\alpha=0$ 上, $(x_1,\cdots,x_n;p_1,\cdots,p_n)$ 可以作为坐标. 在这坐标下, 外形式 $\omega=d\alpha|_{\alpha=0}$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}$, E 为 n 阶单位矩阵. 它的行列式是 1. 因此 2 次形式 ω 是非退化的.

注 非退化斜对称双线性形只能定义在偶数维空间中. 所以接触形式只能给在奇数维流形上.

定理 设 α 为接触形式, f 是处处不为 0 的函数. 这时 $f\alpha$ 仍是接触形式,辛构造

$$d\alpha|_{\alpha=0} \text{ 与 } d(f\alpha)|_{\alpha=0}$$

在 $\alpha=0$ 上相差一个不为 0 的因子.

◀由 Leibnitz 公式,有

$$d(f\alpha)=df\wedge\alpha+fd\alpha.$$

但在 $\alpha=0$ 上, $df\wedge\alpha$ 是零 2 次形式. 因此在 $\alpha=0$ 上, 2 次形式 $d\alpha|_{\alpha=0}$ 与 $fd\alpha|_{\alpha=0}$ 只相差非 0 因子 $f|_{\alpha=0}$. 特别可知 $d(f\alpha)|_{\alpha=0}=fd\alpha|_{\alpha=0}$ 是非退化的. 所以 $f\alpha$ 是接触形式. ▶

定义 流形 M 上的接触构造就是一个切超平面场, 它局部地是 1 次接触形式的零空间. 场中的超平面称为接触超平面. x 点的接触超平面将记作 Π_x (图 53).



图 53

注 1　由上述定理可知，一个平面场的 1 次形式之为接触形式，并不依赖于该形式的选取，而依赖于接触平面场本身。事实上，若另一个形式 β 也给出同样的平面场，则 β 与 α 局部地只相差一个处处非 0 的因子；因此，β 与 α 同时为接触或非接触形式。

注 2　只有奇数维流形才可能有接触构造。

定义　接触流形的子流形，若其各点的切空间均属于该点处的接触平面，则称为接触平面场的积分流形。

问题　求证 $2n+1$ 维接触流形 M^{2n+1} 的接触平面场的积分流形维数不超过 n。

解　在积分流形 V 上，形式 $i^*\alpha=0$（$i: V\to M^{2n+1}$ 是嵌入映射）。因此 $i^*d\alpha=di^*\alpha=0$。所以 V 的任意切空间中的两个向量为斜正交：$\omega(\xi,\eta)=0$。由此可知切空间维数不能大于 n（见 §8 D，问题 2）。

注　M^{2n+1} 的接触平面场有 n 维积分流形存在。它称为 Legendre 子流形。我们将会看到，对应于每个函数，在 1 阶节空间中均有一个 Legendre 子流形。

B. 函数的 1 阶节流形上的接触构造

设 V 为 n 维流形。考虑 V 上函数的 1 阶节流形 $J^1(V, R)$。

V 上函数 f 的 1 阶节由一点 $x\in V$，f 在 x 点之值 $u=f(x)$ 以及 f 在 x 之 1 阶微分所确定。因此 V 上的函数之 1 阶节流形维数为 $2n+1$。若 $(x_1,\cdots,x_n)$ 是 V 上的局部坐标，则 V 上的函数 f 的 1 阶节由一组 $2n+1$ 个数定义 $(x_1,\cdots,x_n;u;p_1,\cdots,p_n)$，

$$p_i=\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x).$$

定义　函数的 1 阶节流形 $J^1(V,\mathbb{R})$ 的标准接触形式即 1 次形式

$$\alpha=du-pdx\ \ (pdx=p_1dx_1+\cdots+p_ndx_n).$$

上面已经证明，它确是 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的接触形式。

不难看到，用坐标定义的 α 其实并不依赖于 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的选择，从而它是整体定义的。

定义　函数 $f: V\to\mathbb{R}$ 的 1-图象即由 f 在 V 上各点的 1 阶

节构成的子流形。

于是 n 元函数的 1- 图象是 $2n+1$ 维空间中的一个 n 维曲面。

定理 n 元函数的 1 阶节流形的标准接触形式在任一个函数的 1- 图象的一切切平面上均为 0。所有函数 1- 图象的切平面并集的闭包即标准接触形式在节流形之各点上的零空间。

◀第一部分可由全微分的定义 $du=pdx$ 得出。第二部分可由以下事实得出：存在一个函数，它在某定点具有给定的一阶偏导数。▶

由此定理可知，标准接触形式在 1 阶节空间中所给出的平面场并不依赖于(给出该形式时)所采用的局部坐标。这使我们可以给出以下的定义。

定义 V 上函数的 1 阶节流形的标准接触构造即 V 上函数的 1- 图象的所有切平面之并。

问题 流形 V 与 $\mathbb{R}$ 上的微分同胚群自然地作用在函数的 1 阶节流形 $J^1(V, \mathbb{R})$ 上。证明 1 阶节流形的标准接触构造对此作用是不变的。

此外，1 次标准接触形式 α 在流形 V 的微分同胚群作用下不变，而在直线 $\mathbb{R}$ 的微分同胚作用下被乘以一个不为 0 的函数。

C. 接触流形的超曲面上的几何学

现在回到一般的接触流形 M^{2n+1} 上。令 E^{2n} 为 M^{2n+1} 中的光滑超曲面(图 54)。

定义 接触流形 M^{2n+1} 中的超曲面 E^{2n} 称为非特征的，如果它在每一点 x 的切平面与该点的接触平面互为横截(即其和给出 M^{2n+1} 的整个切空间，亦即它们相交于一个 $(2n-1)$ 维空间)。

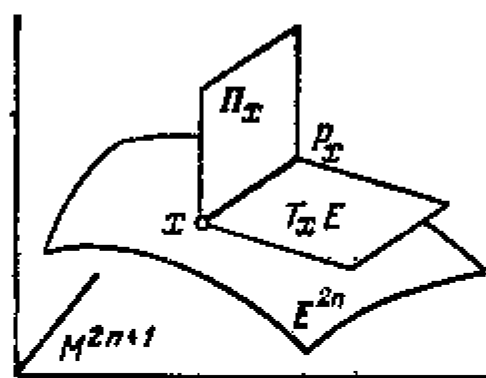


图 54

定义 非特征超曲面在一点 x 的切平面与接触流形在该点的接触平面的交称为此点的特征平面：

$$P_x = T_x E \cap \Pi_x.$$

于是 M^{2n+1} 的一个非特征超曲面上的特征平面构成一个 $2n$ 维流形上的 $2n-1$ 维平面场：即由接触平面与该非特征超曲面的切空间相交所得的平面场。

结果是，接触构造将在每一个这种 $2n-1$ 维平面上定义一条直线，即所谓**特征方向**。

D. 斜正交补

为了定义特征方向，先提醒一下，在具有非退化双线性形式的线性空间中，可以定义正交补（一对向量的正交性定义为该形式在这一对向量上之值为 0）。

例 1 令 (L, ω) 为 Euclid 空间，即 L 为一线性空间，ω 为数量积。对每个向量 ξ 相应有一个 1 次形 $\omega(\xi, \cdot)$ 即与 ξ 的数量积。它在向量 η 上的值为 $\omega(\xi, \eta)$。

例如 grad$f$ 即相应于 df 的向量。

对于 L 中一直线有其正交补（即相应于此直线上的向量的 1 次形之零平面）。每一个余维数为 1 的平面又都是 L 中一直线的正交补（图 55）。

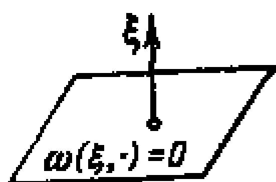


图 55

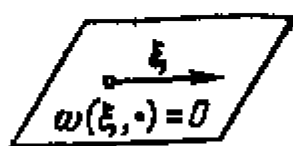


图 56

注意，对 ω 乘以一个非 0 数，不会改变向量的正交性。所以 ω 乘以一个非 0 数也不会改变一直线与其正交补的对应关系。

例 2 令 (L, ω) 为一辛空间，即 L 为一线性空间而 ω 为其上的斜数量积（即一非退化的斜对称双线性形）。

对每一向量 ξ 相应有一个 1 次形式 $\omega(\xi \cdot)$ 即与 ξ 的斜数量积。它在向量 η 上之值即 $\omega(\xi, \eta)$（图 56）。

例如具有 Hamilton 函数 H 的 Hamilton 场即相应于 1 次形式 dH 的场。

对 L 中的直线有其斜正交补（即相应于该直线上的向量之 1 次形式的零平面）与之相应。L 的每一个余维数 1 的平面亦均为唯一直线的斜正交补。

注意，对 ω 乘以一个非 0 数不改变斜正交性。因此，对辛构造 ω 乘以一个非 0 数不会改变一直线与其斜正交补的对应关系。

问题 1 证明每一直线均在其自身的斜正交补内。

解 $\omega(\xi,\xi) = -\omega(\xi,\xi) = 0$.

问题 2 证明若 $2n$ 维辛空间的一子空间中的一切向量均互相斜正交，则此子空间的维数不超过 n.

解 k 维子空间的斜正交补的维数为 $2n-k$（事实上，若取基底 $(e_1, \cdots, e_k)$，则方程 $\omega(e_1,\xi)=0, \cdots, \omega(e_k,\xi)=0$ 是 k 个互相独立的关于 ξ 的方程，因为若方程相关，则由形式 ω 的非退化性可得向量 e_i 的相关性）。

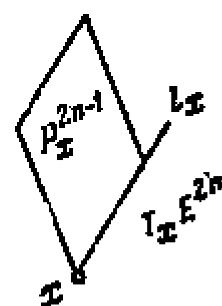
若 $k>n$，则斜正交补的维数小于 n 而此子空间不可能斜正交于其本身.

注 $2n$ 维辛空间确有斜正交于其本身的 n 维子空间存在. 它们称为 Lagrange 子空间.

E. 接触流形的超曲面上的特征曲线

我们再回到接触流形的非特征超曲面上的几何学。

我们已经在此超曲面 E^{2n} 的每一点上定义了一个 $(2n-1)$ 维特征平面 P：即接触平面与 E^{2n} 在该点的切平面之交（图 57）。



57

定义 接触流形的非特征超曲面上 x 点的特征方向即特征平面在接触平面内的斜正交补（以 $d\alpha|_{\alpha=0}$ 为斜数量积）：

$$l_x = P_x^{2n-1} \text{ 在 } \Pi_x^{2n} \text{中的斜正交补}.\quad P_x^{2n-1} = T_xE^{2n} \cap \Pi_x^{2n}.$$

注意，特征方向位于特征平面内（见 § 8 D）；$n=1$ 时，特征方向即特征平面。

在一般情况下，接触流形之光滑的非特征超曲面上各点的特征方向构成此超曲面上的光滑向量场：每点的特征方向也属于该点的接触超平面（图 58）。

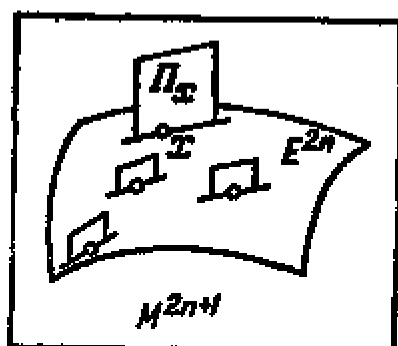


图 58

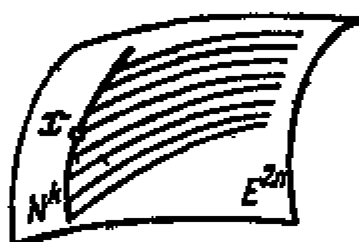


图 59

定义　接触流形的非特征超曲面 E 上的特征方向场的积分曲线称为超曲面 E 的特征曲线。

令 N^k 为接触平面场在 E^{2n} 中的 k 维积分流形。

定义　点 $x\in N^k$ 称为非特征点，若 N^k 在此点的切平面不包含特征方向(图 59)。

问题　证明若 x 是流形 N^k 上的非特征点，则 $k\leqslant n-1$，并作一个 M^{2n+1} 的接触平面场的位于 E^{2n} 内的 n 维积分曲面的例子。

事实表明，过非特征积分流形 N^k 上各点的特征曲线（局部地)构成超曲面 E^{2n} 上的 $(k+1)$ 维积分子流形。为了证明这一点，需要一个关于平面场对微分同胚的单参数群之不变性的简单的一般引理。

F. 插话：平面场的不变性的一个条件

设 α 为非 0 的 1 次微分形式。这形式给出一个超平面场。令 v 为非 0 向量场。它给出一个方向场(即直线场)。

设方向场 v 在各点均属于 α 在该点的 0 超平面：

$$\alpha(v)=0.$$

引理　为使 α 的零超平面场对场 v 的相流不变，其充分必要条件：对平面场 $\alpha(\xi)=0$ 中的一切 ξ 都满足 $d\alpha(v,\xi)=0$。

◀引理的论断是局部的而且对微分同胚不变，只需对坐标为 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的 Euclid 空间中的标准的场 $v=\frac{\partial}{\partial x}$ 求证即可(利用向量场化直的定理)。令 $\alpha=a_1dx_1+\cdots+a_ndx_n$。由条件

$a(v) \equiv 0$ 有 $a_1 \equiv 0$。

问题 证明 a 之外微分在 (v, ξ) $\left(v = \frac{\partial}{\partial x_1}, a(v) \equiv 0, \xi\right.$ 为任意向量$\left.\right)$上的值就是 $\frac{\partial a}{\partial x_1}$ 在 ξ 上之值。

解 $\left(da = \Sigma \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i\right) \Rightarrow \left(da(v, \xi) = \Sigma \frac{\partial a_i}{\partial x_1} \xi_i - \Sigma \frac{\partial a_1}{\partial x_j} \xi_j\right)$.

但 $a_1 \equiv 0$.

另一个可能更清楚的解法是对以 v, ξ 为边的平行四边形应用 Stokes 公式。

形式 a 的零平面场关于沿 x_1 轴平移的不变性就是偏导数 $\frac{\partial a}{\partial x_1}$ 在场中的平面 $a = 0$ 上为 0。

但由 $\frac{\partial a}{\partial x_1}(\xi) = da(v, \xi)$ 可知，不变性条件即

$$(a(\xi) = 0) \Rightarrow (da(v, \xi) = 0). \ ▶$$

G. 特征方向场的 Cauchy 问题

我们再回到接触流形 M^{2n+1} 的非特征超曲面 E^{2n}。令 N^k 为接触平面场在 E^{2n} 中的 k 维积分子流形。

定义 接触流形 M^{2n+1} 的超曲面 E^{2n} 具有初始流形 N^{n-1} 的 Cauchy 问题即求接触平面场的位于 E^{2n} 内的积分流形 Y^n 使它包含初始流形 N^{n-1}（图 60）。

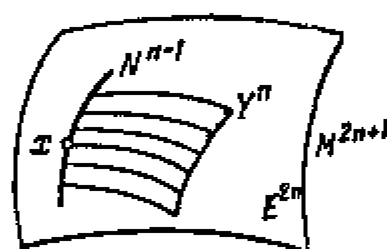


图 60

定理 设 x 为初始流形 N^{n-1} 上的非特征点[1]。一定存在 x 的邻域 U，使 $E^{2n} \cap U$ 具有初始流形 $N^{n-1} \cap U$ 的 Cauchy 问题的解存在且局部地唯一（即具有公共的初始流形的

1）非特征点定义见 § 8E

任两个解都在 x 的某邻域中相同)。

流形 Y^n 由经过初始流形 N^{n-1} 各点的特征曲线组成。

◀过初始流形之各点所作的特征曲线族在 x 点附近构成 E^{2n} 的 n 维光滑子流形 Y^n。现证它就是接触超平面场的积分流形。

考虑在 x 附近给出接触超平面场的 1 次接触形式 α。用 a 记它在 x 附近在超曲面 E^{2n} 上的限制。

因为超曲面 E^{2n} 是非特征的，所以 a 不为 0，(见 § 8 **B**)。此形式在 E^{2n} 上定义了一个切超平面(即接触超平面在 E^{2n} 上的迹)场。E^{2n} 上的特征方向场位于 a 的零平面场内(见 § 8 **E**)。

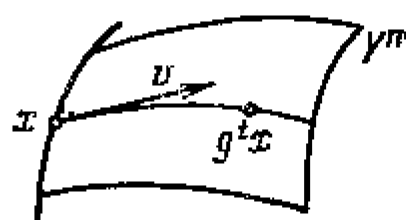


图 61

在 E^{2n} 的点 x 附近考虑任意的向量场 v，但其方向在每一点均为特征方向。用 $\{g^t\}$ 记场 v 所定义的 E^{2n} 上的单参数微分同胚局部群(当 t 接近 0 时，g^t 定义在点 x 附近)(图 61)。

流形 Y^n 之每点均可由初始流形上某点，借助适当的微分同胚 g^t 得出。

引理 A　形式 a 在 Y^n 的初始流形各点之切空间上为 0。

引理 B　微分同胚 g^t 将形式 a 的零平面仍变为零平面。

A. ◀因为流形 N^{n-1} 是积分流形，所以形式 a 在切于 N^{n-1} 的向量上为 0。形式 a 在向量 v 上也为 0，因为特征方向在接触超平面上。即是说，形式 a 在和 $T_xN^{n-1} + \mathbf{R}v$ 上为 0。▶

B. ◀考虑任一 a 在其上为 0 的向量 ξ (不一定取在流形的原点处)。计算 da 在此点的 (v, ξ) 之值。由定义 $a = \alpha|_{E^{2n}}$，此值等于接触形式的外微分之值 $d\alpha(v, \xi)$。由特征方向的定义，后者对接触平面上的任意 ξ 均为 0。由 § 8 **F** 的引理，$a = 0$ 对于 $\{g^t\}$ 不变。▶

由引理 A，B 可知，形式 a 在 Y^n 的所有切向量处为 0。因此 Y^n 是积分流形。

这样我们作出了接触超平面场的通过初始流形 N^{n-1} 的积分流形 $Y^n \subset E^{2n}$。

H. 唯一性的证明

引理 接触平面场的任意位于 E^{2n} 内的 n 维积分流形的切平面均包含特征方向。

◀ 1 次接触形式 α 在其任意积分流形上的限制均为 0。2 次形式 $d\alpha$ 在此流形上的限制即 α 限制的外微分，从而也为0。因此，积分流形的任意两个切向量(对于斜数量积 $d\alpha|_{\alpha=0}$) 均为斜正交。

E^{2n} 的特征方向向量对平面 $\alpha=0$ 内的一切向量均为斜正交，设它不属于接触平面场的位于 E^{2n}内的 n 维积分流形的切平面，它与此切平面就应张成一个 $(n+1)$ 维子空间。但这个子空间的一切向量彼此均为斜正交。由 § 8 **D** 问题 2，这个子空间的维数不会超过 n. ▶

由此引理可知，接触平面场位于 E^{2n} 内的 n 维积分流形对其每一点均包含一段通过该点的特征曲线。由此可知包含已给的初始流形的积分流形，是局部唯一的。▶

I. 对一阶非线性偏微分方程的应用

现在把关于函数 $u: V^n \to \mathbf{R}$ 的一阶非线性偏微分方程看作 1 阶节流形 $M^{2n+1}=J^1(V^n, \mathbf{R})$ 上的超曲面，而 M^{2n+1}上有标准的接触构造。

设 $(x_1, \cdots, x_n)$ 与 u 分别是 V^n 与 $\mathbf{R}$ 上的局部坐标；用 $(x_1, \cdots, x_n; u; p_1, \cdots, p_n)$ 记 1 阶节流形上的相应局部坐标. 这时微分方程可以局部地写为

$$\Phi(x, u, p)=0. \qquad (1)$$

求解微分方程就化为求接触平面场的位于 E^{2n} 中的积分曲面，且使它为函数的 1- 图象(见 § 8 **B**)。

我们所得的一般定理，把求解此方程化为在 E^{2n} 上作特征曲线，为此则需求 E^{2n} 上某方向场的积分曲线(即求解一组 $(2n-1)$

个常微分方程)。

定理 方程(1)的解即其 1- 图象由 E^{2n} 上的特征曲线所组成的函数。

◀见 §8 **B**, §8 **G** 和 §8 **I**.▶

J. 一阶非线性偏微分方程的 Cauchy 问题

令 $\gamma^{n-1}\subset V^n$ 是流形 V^n 的 $(n-1)$ 维子流形，$\varphi:\gamma^{n-1}\to\mathbb{R}$ 为光滑函数，$E^{2n}\subset J^1(V^n,\mathbb{R})$ 是由方程(1)给出的光滑非特征超曲面。

定义 方程(1)的 Cauchy 问题即求解 $u:V^n\to\mathbb{R}$，使它在 γ^{n-1} 上成为 φ。

定义 由初始条件 (γ,φ) 作出的初始流形 N^{n-1} 即由适合以下条件的 V^n 上的函数的 1 阶节所成的集合(图 62):

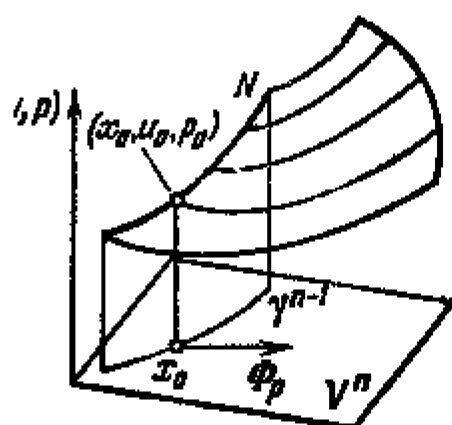


图 62

1) 节的作用点在 γ^{n-1} 上；

2) 函数在此点之值等于 φ;

3) 函数在此点的全微分之值是使得，它在 γ^{n-1} 的切平面上的限制等于初始条件 φ 的全微分；

4) 节属于 E^{2n}。

定义 初始流形上的点称为对方程(1)为非特征的，如果这点的特征方向在 V^n 上的投影横截于 γ^{n-1} (这个定义与 §8 **E** 中的定义不同)。

注 我们说"未知函数沿 γ^{n-1} 的 $n-1$ 个方向的导数由初始条件决定，而沿最后一个方向(即横截于 γ^{n-1} 的方向)的导数由方程(1)决定。"

例 设 γ^{n-1} 由坐标为 (x_1,x') 的空间中的方程 $x_1=0$ 决定。这时 N^{n-1} 由以下方程给出：

$$x_1=0,\ u=\varphi(x'),\ p'=\frac{\partial\varphi}{\partial x'};$$

p_1 则由方程 $\Phi(x,u,p)=0$ 决定。

定理 设1阶节流形中的点 (x_0, u_0, p_0) 是初始流形 N^{n-1} 的非特征点。这时具有初始流形 N^{n-1} 方程(1)的解在初始点 x_0 的某邻域U中存在，而且是局部唯一的(即若方程有两个解满足初始条件 $u|_{U\cap\gamma^{n-1}} = \varphi|_{U\cap\gamma^{n-1}}$，$u(x_0) = u_0$，$du(x_0) = p_0$，则它们必在 x_0 之某个邻域中重合)。

◀由§8G之定理即知，该定理还给出了构造此解的方法。▶

K. 显式公式

问题 显式地写出方程 $\Phi(x, u, p) = 0$ 的特征曲线的微分方程。

答

$$\dot{x} = \Phi_p,$$
$$\dot{p} = -\Phi_x - p\Phi_u,$$
$$\dot{u} = p\Phi_p.$$

解法 考虑切于流形 $\Phi = 0$ 的向量。其分量 (X, U, P) 满足

$$\Phi_x X + \Phi_u U + \Phi_p P = 0.$$

若 $du - pdx$ 在此向量上为0，即 $U = pX$，则此向量位于接触平面上。

于是，向量 (X, pX, P) 在接触平面与流形 $\Phi = 0$ 的切平面交集内的充分必要条件是

$$(\Phi_x + \Phi_u p)X + \Phi_p P = 0. \tag{2}$$

特征向量 $(\dot{x}, \dot{u} = p\dot{x}, \dot{p})$ 由以下条件决定：它与一切适合上式的向量之斜数量积为0。

但此斜数量积等于 $d\alpha = dx \wedge dp$ 在一对向量 $(\dot{x}, \dot{u} = p\dot{x}, \dot{p})$ 和 $(X, U = pX, P)$ 上之值，即 $\dot{x}P - \dot{p}X$。

因此，X 和 P 的方程(2)应等价于方程

$$\dot{x}P - \dot{p}X = 0. \tag{3}$$

因此，方程(2)，(3)中 X 与 P 的系数应成比例。由于 $\dot{u} = p\dot{x}$ 即得上述的答案。

L. 非特征条件

问题 显式地写出对 γ^{n-1}，φ 与 Φ 应加的条件，使 (x_0, u_0, p_0) 对方程 $\Phi(x, u, p) = 0$ 及 γ^{n-1} 上的初始条件 φ 为非特征的。

答 $\Phi_p(x_0, u_0, p_0)$ 在 x_0 点不切于 γ^{n-1}(图62)。

解法 将过初始流形各点的特征曲线所成曲面的切平面投影到 x 平

面上．若此曲面是解的 1-图象而点 (x_0, u_0, p_0) 又是非特征的，则切平面由 N^{n-1} 的切向量与特征方向生成．投影是同构的．因此，特征向量的 x 分量必在 x_0 处横截于 γ^{n-1}．但这个分量就是 Φ_p（见 § 8 K）．

反之，若 Φ_p 在 x_0 点不切于 γ^{n-1}，则：

1） 超曲面 $\Phi=0$ 在 (x_0, u_0, p_0) 附近是光滑的．事实上，$\Phi_p \neq 0$，所以 $d\Phi|_{(x_0, u_0, p_0)} \neq 0$．

2） 超曲面 $\Phi=0$ 在点 (x_0, u_0, p_0) 处是非特征的，事实上，向量 $(0, 0, \Phi_p)$ 位于接触平面内．因 $\Phi_p(x_0, u_0, p_0) \neq 0$，故它不切于超曲面 $\Phi=0$．

3） 初始流形 N^{n-1} 在 (x_0, u_0, p_0) 附近是光滑的．

事实上，可取坐标 $(x_1, \cdots, x_n)=(x_1, x')$，使 γ^{n-1} 的局部方程为 $x_1=0$．因此，$p_1(x')$ 的方程

$$\Phi\left(0, x', \varphi(x'), p_1, \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right)=0$$

的可解条件是 $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial p_1}\right|_{(x_0, u_0, p_0)} \neq 0$；向量 Φ_p 与 γ^{n-1} 不相切条件亦如此．

4） 初始流形上的点 (x_0, u_0, p_0) 是非特征点．

事实上，若特征向量切于初始流形 N^{n-1}，则其投影 Φ_p 也应切于 N^{n-1} 在 x 空间上的投影 γ^{n-1}．

5） 在 (x_0, u_0, p_0) 附近与初始流形相交的特征曲线，在此邻域中构成一个光滑流形，从而可微分同胚地投影到 x 空间上（它是一个函数的 1-图象）．

事实上，将此流形在 (x_0, u_0, p_0) 的切平面投影到 x 空间上，其象应包含 γ^{n-1} 的切平面及一个与它横截的向量．因此所讨论的映射在点 (x_0, u_0, p_0) 的导数是一同构，而投影映射（由反函数定理）是局部的微分同胚．

于是，若在 (x_0, u_0, p_0) 点 Φ_p 不切于 γ^{n-1}，则非特征性的五个条件均在此点成立．

11 Hamilton-Jacobi 方程

定义 Hamilton-Jacobi 方程即方程

$$H(x, u_x)=0. \tag{1}$$

与一般的一阶偏微分方程不同，未知函数本身不出现在方程中．

例 设 γ 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的光滑超曲面，$u(x)$ 是点 x 到 γ 的距离（图 63）．这时函数 u（在此函数为光滑之处）满足 Hamilton-Jacobi 方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2=1. \qquad (2)$$

实际上，此函数梯度的模等于到 γ 的距离沿 γ 的法线的导数的模，即等于1。

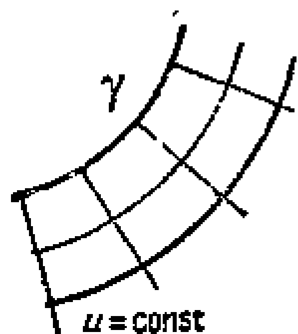


图 63

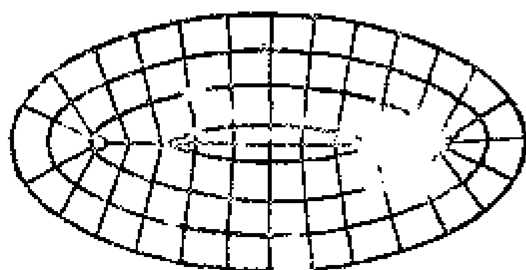


图 64

u 在整体上可能是不光滑的。例如，设 γ 是平面上的椭圆。这时 u 的奇点组成椭圆内的一个线段(图 64)。

问题 证明 Hamilton-Jacobi 方程 (2) 的所有解都是到超曲面的距离与常数之和。

在研究 Hamilton-Jacobi 方程时，考虑余切丛 T^*V^n 比考虑 V^n 上函数的 1 阶节流形 $J^1(V^n, \mathrm{R})$ 更有用。在力学里，空间 T^*V^n 称为构形空间 V^n 的相空间。V^n 在 x 点的余切向量定义是 V^n 在 x 点的切空间上的线性齐次函数。V^n 在 x 点的所有余切向量构成一个线性空间，此空间称为 V^n 在 x 点的余切空间，记作 $T_x^*V^n$，V^n 在一切点上的余切向量构成一个 $2n$ 维光滑流形，它称为 V^n 的余切空间丛(简称余切丛)，并记作 T^*V^n。

令 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是 V^n 上的局部坐标。这时，V^n 在 x 的余切向量将由一组 n 个数 $(p_1, \cdots, p_n)$ 给出。即是说，数组 $\{p_k\}$ 对应于 V^n 在 x 点的切空间上的 1 次形式 $p_1dx_1+\cdots+p_ndx_n$。这一组 $2n$ 个数 $(p_1, \cdots, p_n; x_1, \cdots, x_n)$ 即构成 V^n 余切丛的一个局部坐标。

由函数的 1 阶节流形 $J^1(V^n, \mathrm{R})$ 到 V^n 的余切丛有自然的投影

$$\pi: J(V, \mathrm{R}^n) \to T^*V^n.$$

π 就是"忘掉函数值"，用坐标表示就是

$$(x_1, \cdots, x_n; u; p_1, \cdots, p_n) \longmapsto (x_1, \cdots, x_n; p_1, \cdots, p_n).$$

定义 Hamilton-Jacobi 方程(1)的特征曲线即(1)作为一阶偏微分方程的特征曲线在余切丛上的投影。

问题 求 Hamilton-Jacobi 方程(1)的特征曲线的微分方程。

答. $\dot{x}=H_p$, $\dot{p}=-H_x$.

注 这个常微分方程组称为 Hamilton 典则方程组。相应的向量场不仅定义在曲面 $H=0$ 上，而且定义在整个相空间上。

问题 求 Hamilton-Jacobi 方程(2)的特征方程。

答. $x=2at+b$, $p=a$ (a 和 b 是常向量 $a^2=1$)。

这样，特征曲线在 V^n 上的投影是直线。

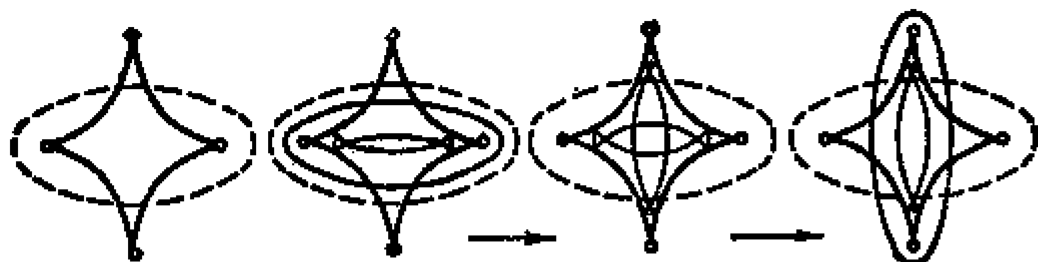


图 65

在几何光学中，Hamilton-Jacobi 方程(2)称为光程方程；特征曲线在 V^n 上的投影称为光线。函数 u 称为光学长度，它的等值面称为波前。除了这些以外，聚焦曲线在几何光学中起了极重要的作用。例如考虑由凹曲面(例如茶杯的内侧)反射的光所照亮的墙。在墙上可以看见特别亮的曲线而且有奇点，这就是聚焦曲线。

聚焦曲线的定义如下.考虑一阶偏微分方程的 Cauchy 问题.即令相应的特征曲线可以无限拓展而不相交从而构成一整体的积分流形，它对 V^n 上的投影也不一定是微分同胚。

积分流形对 V^n 的投影的临界值集就称为聚焦曲线。

对于 Hamilton-Jacobi 方程为(2)，而初始条件为在 γ 上 $u=0$ 这一特例，聚焦曲线就是超曲面 γ 的焦点亦即曲率中心的轨迹。

问题 1. 画出平面上椭圆曲率中心的轨迹。

问题 2. 在椭圆的每一内法线上截取长为 t 的线段。画出所得曲线并研究 t 增长时它的变化。

答。见图 65。

§ 9. Frobenius 定理

平面上的方向场定义一族积分曲线，而且它们可以局部拉直(即用微分同胚化为平行直线场)。三维以上的空间即不复如此：$\mathbb{R}^3$ 中的平面场一般没有积分曲面。

本节讨论超平面场局部可拉直的条件，即使它为一族光滑超曲面的切空间场的条件。

A. 完全可积超平面场

设 M^n 为一光滑流形，其上给出切超平面场。在一点附近，此场由一个 1 次微分形式 α 给出，α 处处不为 0，而且可以确定到相差一个处处非 0 的函数因子。

定义 若在场中的超平面场上 $d\alpha$ 恒为 0，此场就称为完全可积。

注 场的完全可积性并不依赖于局部定义它的形式 α 的选取，因为若把 α 乘以一个处处非 0 的函数，$d\alpha|_{\alpha=0}$ 也将被乘以此函数(见 § 8 **A**)。

命题 超平面场 $\alpha = 0$ 完全可积的充分必要条件是

$$\alpha \wedge d\alpha = 0.$$

◀在 M^n 上面考虑点的切空间中取一基底，它由平面 $\alpha = 0$ 上的 $n-1$ 个"水平向量" "($e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$) 和一个铅直向量 "$f$ 组成(图 66)。在三个水平向量上，3 次形式 $\alpha \wedge d\alpha$ 为 0，这是因为 $\alpha = 0$。其次

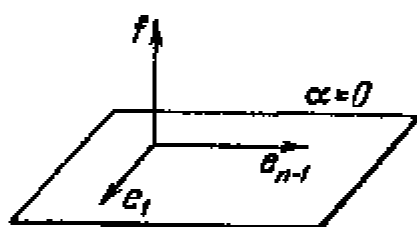


图 66

$(d\alpha \wedge \alpha)(e_i, e_j, f) = 0$，因为它可以分成许多项，每一项或有因子 $\alpha(e_i)$ 或有因子 $d\alpha(e_i, e_j)$，而它们都为 0。

反之，若 $\alpha \wedge d\alpha = 0$，则 $d\alpha(e_i, e_j) = 0$。事实上，$(\alpha \wedge d\alpha)$

(e_i, e_j, f) 之各项中唯一的既不包含 $\alpha(e_i)$ 又不包含 $\alpha(e_j)$ 的项是 $d\alpha(e_i, e_j)\alpha(f)$；但 $\alpha(f) \neq 0$。▶

注 条件 $\alpha \wedge d\alpha = 0$ 称为 Frobenius 可积性条件。由上证的命题可知，它是关于平面场的条件：对于给出同一平面场的一切形式 α，它或者都成立，或者都不成立。

B. 积分流形的存在

定理 超平面场 $\alpha = 0$ 是一族超曲面的切空间场的充分必要条件是此场满足 Frobenius 可积性条件 $\alpha \wedge d\alpha = 0$。

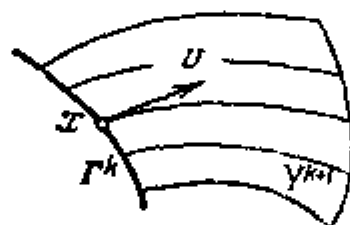


图 67

◀在族中的曲面上 $\alpha = 0$，故 $d\alpha = 0$。反之，设在平面 $\alpha = 0$ 上 $d\alpha = 0$。在点 x 附近可作出积分曲面族如下。令 v 为适合 $\alpha(v) = 0$ 的任意向量场（即在每一点都位于平面场的平面内的向量场），Γ^k 为平面场的任意积分子流形（图 67），而 $v(x)$ 不在 Γ^k 的 x 点的切平面内。

引理 经过积分子流形 Γ^k 上各点的场 v 的相曲线，在 x 点附近构成完全可积平面场 $\alpha = 0$ 的光滑积分流形 Y^{k+1}。

◀用 $\{g^t\}$ 记场 v 的局部相流。这时：(a) 微分同胚 g^t 变场 $\alpha = 0$ 中的平面为场中的平面。

事实上，对场中平面上的一切向量 ξ，$d\alpha(\xi)=0$，所以由 §8 E 中的引理，平面场在微分同胚 g^t 下不变。

此外，(b) 在初始流形 Γ^k 的点上，Y^{k+1} 的切空间位于场中的平面上。

事实上，积分流形 Γ^k 的切平面和向量 v 都属于场中的平面，而 Y^{k+1} 在 x 点的切空间则是由 $v(x)$ 和 $T_x\Gamma^k$ 生成的。

由 (a) 和 (b) 可知 Y^{k+1} 是平面场 $\alpha = 0$ 的积分流形。▶

现在再由逐步加大积分子流形的维数即可作出 $n-1$ 维积分流形。

考虑局部坐标 $(x_1, \cdots, x_{n-1}; y)$，使坐标平面属于场 $\alpha = 0$

在原点处的平面。

由场中平面向坐标平面 $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ 沿 y 轴的投影，在原点附近总是同构。

考虑坐标平面上的基底向量场 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)$。它们在场中平面上的原象成为原点附近的光滑向量场，我们用 $(v_1, \cdots, v_{n-1})$ 记这些场。

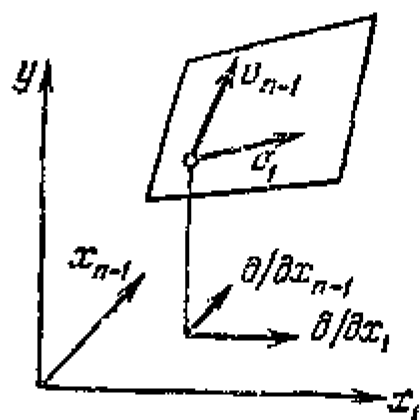
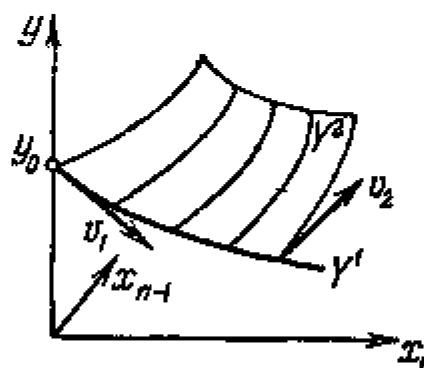


图 68



69

以 y 轴上的 y_0 点作为起始的(即零维的)积分流形 Γ^0 (图69)。

对 Γ^0 与 v_1 应用引理，即得一维积分流形 Y^1。在 Y^1 上有 $x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$，所以 $v_2 \notin T_0 Y^1$。

对 Y^1 和 v_2 应用引理，即得二维积分流形 Y^2。这样作下去，我们即可从积分流形 Y^k (在其上 $x_{k+1} = \cdots = x_{n-1} = 0$) 用场 v_{k+1} 的流作用，得到积分流形 Y^{k+1}。

这个过程一直到作出所求的流形 Y^{n-1}，才告终止。▶

第三章 结构稳定性

在使用任一个数学模型时，都会产生如下问题应用这个模型性态的数学结果于现实世界是否正确？事实上，假设这个结果对于模型的微小变化都极为敏感，这时无论模型有多小的变动（例如给出微分方程的向量场有了小的改变），都会导致性质全异的模型。把这样的结果用于所探讨的实际过程是危险的，因为在建立这个模型时总有一些理想化，例如参数只能近似地确定等等。这样，就必须适当选择一个过程的模型的一些性质的问题，这些性质对模型的微小改变应该不甚敏感，于是这些性质就可认为是现实过程的性质。

选择这类性质的一种试探导致了"粗性"亦即结构稳定性的概念（А. А. Андронов 与 Л. С. Понтрягин, 1937）。结构稳定性理论在低维数（一或二维）相空间情况下得到的显著的成就使人们产生了一种乐观的期望，但终于由于 S. Smale 在六十年代的工作而告破灭：Smale 指出，在高维数相空间中存在这样的系统，在其附近，连一个结构稳定系统也没有。这个结果对于微分方程定性理论的价值，大约和 Liouville 关于微分方程不可用求积法解出的定理对于微分方程求积理论的价值相当。具体说，他指出了，对高维相空间的微分方程作完全的拓扑分类是没有希望的，那怕只限于通有的而略去所有蜕化的情况也是这样。

本章将对结构稳定性理论的基本概念、方法和结果作一个简要的综述。

§ 10. 结构稳定性的概念

本节中将定义结构稳定性的概念，并且研究一维相空间的结

构稳定向量场。

A. 结构稳定性的直观定义

考虑由微分流形M上的向量场v所给出的微分方程

$$\dot{x}=v(x),\quad x\in M.$$

我们也说v给出了一个**动力系统**(简称系统)。我们将总是假设方程的解可以无限拓展；当M为紧流形时，这总是对的。

例 带摩擦的摆(图 70):

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-x_1-kx_2.$$

若$k=0$则所有相曲线都是闭的. 若$k>0$，它们绕着趋向焦点型的奇点. 因此，如果摩擦系数原来是 0，则它的微小变化将要定性地改变相曲线的性态. 如果摩擦系数原来为正，则不会改变定性的图景.

下面给出的结构稳定性的定义表述了这种区别：无摩擦的摆是结构不稳定系统，而有摩擦的摆是结构稳定的.

定义 一个动力系统称为**结构稳定的**，如果当向量场作任意充分小变动时，所得的动力系统都等价于原系统.

为了使此定义有意义，需要定义何谓场的微小改变以及什么样的系统可看作等价的.

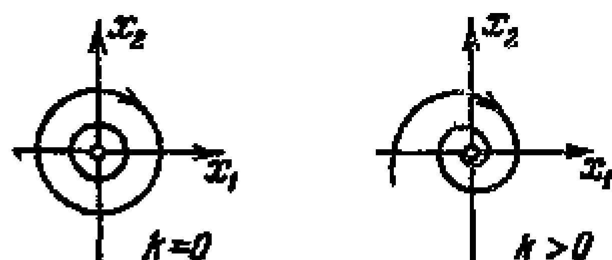


图 70

B. 拓扑等价性

微分方程最精密的分类基于微分同胚概念. 两个系统(M_1, v_1)和(M_2, v_2)称为**微分同胚的**，如果存在微分同胚$h: M_1\to M_2$，把向量场v_1变为v_2.

从光滑流形的几何学的观点看来，微分同胚的系统是没有区别的。下面的例子指出，分类到只相差微分同胚是太精细了（不等价的系统太多了）。

例 考虑一维相空间中的方程 $\dot{x}=x$ 和 $\dot{x}=2x$。

在两个情况下，0 都是唯一的排斥性平衡位置。但这两个系统并不是微分同胚的。

◀如果有微分同胚将一个向量场的奇点变为另一个向量场的奇点，则其导数将把第一个向量场在奇点处形成的算子的线性部分变为第二个向量场在其奇点处的算子的线性部分。因此这两个算子是相似的，特别是具有相同的固有值。这样，向量场在奇点处的线性化的固有值将随向量场连续变化而且在微分同胚下不变。这种不变量称为模（moduli）。模的存在使得向量场分成的微分同胚类不是离散而是连续的（图 71）。

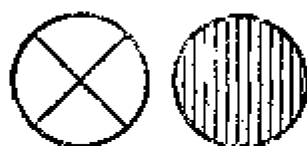


图 71

特别地，既然 $1\neq 2$，上述两个系统不是微分同胚的。▶

为了不必区别这两个场，我们引入了比较粗的等价关系即所谓拓扑等价性。注意，同胚（即双方单值且双方连续的）变换不能作用在向量场上。所以用下面的方法来定义拓扑等价性。

考虑所给的向量场定义的相流。M 上的向量场 v 的相流就是这样一族变换 $g^t:M\to M$，它们把方程 $\dot{x}=v(x)$ 在 0 时刻的初始值 x_0 变为此解在时刻 t 的值 $g^t x_0$；显然，$g^{t+s}=g^t\cdot g^s$，$g^0=1$。若 M 为紧，则 $g^t x$ 对一切 $t\in\mathbb{R}$，$x\in M$ 都有意义。

定义 两个动力系统称为拓扑等价的，如果存在第一个系统的相空间到第二个相空间的同胚 h 变第一个相流为第二个相流

$$hg_1^t x=g_2^t hx.$$

换言之，即要求以下图式为可微：

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{g_1^t} & M_1 \\ h\downarrow & & \downarrow h. \\ M_2 & \xrightarrow{g_2^t} & M_2 \end{array}$$

例如系统 $\dot{x}=x$ 和 $\dot{x}=2x$ 是拓扑等价的。

注 应用同胚以排除对模的考虑，像上面介绍的那样，这是采用同胚与连续拓扑(而不是微分拓扑)的基本的理由。

C. 轨道等价性

令人遗憾，拓扑等价性还不能使我们摆脱模。

例 考虑具有封闭相曲线(例如极限环)的向量场。这时所有拓扑等价的系统也都有极限环，而且周期相同。当场有微小改变时，周期也可能稍有变动。所以沿极限环运动的周期即令对于拓扑等价性也是连续变动的不变量(即模)。为了避开这类模，再引入一个比按照同胚分类的更粗的分类。

定义 两动力系统称为**拓扑轨道等价**如果存在由第一个系统的相空间到第二个相空间的同胚变第一个系统的有向相曲线为第二个有向相曲线。这时不需要两个运动在相应相曲线上的协调。

结构稳定性假设就是：若将动力系统按轨道稳定性分类就不会有(离散的)模，至少是对"通有的"情况即略去蜕化的情况是如此。

D. 结构稳定性的最终定义

令 M 为 $C^{r+1}(r\geqslant 1)$ 类紧光滑流形，v 为 M 上的 C^r 向量场(若 M 有边缘，还要求 v 不切于边)。

如果向量场 v 在 C^1 空间中有一邻域，其中一切向量场都给出与原系统为拓扑轨道等价的系统，而且实现这一等价性的同胚又接近于恒等映射，系统 (M, v) 就称为**结构稳定系统**。

E. 一维情况

设 M 为一圆周。其上的向量场由周期函数给出。场的奇点

即此函数的零点。若函数的导数在此点非 0，这个奇点就称为**非蜕化的**。

定理 圆周上的向量场当且仅当它仅有非蜕化奇点时给出结构稳定系统。

圆周上的两个仅有非蜕化奇点的向量场当且仅当其奇点个数相同时为拓扑轨道等价。

在圆周上一切向量场集合中，结构稳定向量场构成处处稠密开集。

◀设场中所有奇点都是非蜕化的。则它们为数有限而且交错地为稳定与非稳定的。方程 $\dot{x}=v(x)$ 的一切非常值解当 $t\to+\infty$ 时趋向稳定的平衡位置，而当 $t\to-\infty$ 时趋向不稳定的平衡位置。由此易得定理中的所有论断，但有一个例外：还需证明场中一切奇点都可借助场的任意小摄动而变为非蜕化的。

这一个论断利用 Sard 引理来证明也很方便。

引理 区间 $[0,1]$ 上的光滑函数的临界值集具有零测度。

◀将此区间分为N等分，并取出其中包含有临界点的。若N充分大，则导函数绝对值在每一个取出的小区间上不超过 C/N(C是不依赖于N的常数)。所以，每一个取出的区间之象长度不超过C/N^2.用长为 $2C/N^2$ 的区间覆盖这个象，我们就得到临界值集用一族区间的覆盖，其长度不超过 $2C/N$。▶

考虑一族在圆周上的向量场，含参数 ε：$v(x,\varepsilon)=v(x)-\varepsilon$。这时 x 是场的相应于 ε 值的蜕化奇点，当且仅当 ε 是 $v(x)$ 的临界值。

但是一切临界值构成零测度集，所以存在任意小的非临界值。固定非临界值 ε。场的所有相应于参数的这个值的奇点都是非蜕化的。▶

F. 插话：Sard 定理

设 f：$M\to N$ 是任意维流形间的光滑映射。在原象空间中取一点，如果映射在此点的微分的象之维数小于象空间的维数，则

称此点为临界点。映射在临界点的值称为临界值。

定理 一切充分光滑映射的临界值集合的测度为 0。

◀ 1. 如果原象空间的维数为 0，定理显然成立；若维数为 1，则已证明如上。今设当原象空间维数为 $m-1$ 时定理已证，现在对 m 维原象空间来证明此定理。

2 将映射的临界点的集合分成子集。若在原象空间的一点映射的所有 $1,\cdots\cdots,r$ 阶导数均为 0，则称此点为 r 阶平坦点。用 K_r 记 r 阶平坦点的集合。

3 先考虑临界点集 $K\backslash K_1$. 求证相应临界值集（即 $f(K\backslash K_1)$）之测度为 0。

在 $K\backslash K_1$ 之每一点上至少有一个一阶偏导数非 0，设用坐标表示的这个偏导数是 $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}$. 在此点附近可以取 f_1 代替 x_1 为局部坐标，而保留 $x_2,\cdots,x_m$. 在此坐标中，f 可表为一族单参数的由 $m-1$ 维空间到 $n-1$ 维空间的光滑映射

$$(f_1;\ x_2,\cdots,\ x_m)\longmapsto(f_1;\ f_2,\cdots,\ f_n).$$

固定参数 f_1 之值为 c. 映射 f 诱导出原象空间的 $m-1$ 维平面 $f_1=c$ 到象空间中的 $n-1$ 维平面 $f_1=c$ 上的光滑映射。

由归纳假设，映射 f_c 之临界值集在象空间有 $n-1$ 维测度 0（对 $m-1$ 维原象定理已证）. 由 Fubini 定理，映射 f_c 临界值集对 c 之并有 n 维测度 0。

但 $K\backslash K_1$ 的位于此点附近的临界点集的象包含在这个并中，由此可知 $f(K\backslash K_1)$ 之测度为 0。

4 考虑 r 平坦点集 $K_r\backslash K_{r+1}$. 证明相应的临界值集 $f(K_r\backslash K_{r+1})$ 测度为 0。

在 $K_r\backslash K_{r+1}$ 之每一点至少有一个 $r+1$ 阶偏导数非 0，例如 $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}$, g（在适当坐标系下）是 f_1 的某个 r 阶导数。

在该点附近集 $K_r\backslash K_{r+1}$ 包含在光滑的 $m-1$ 维超曲面 $g=0$ 内。集合 $K_r\backslash K_{r+1}$ 的点是 f 在此超曲面上限制的临界点，因为在

K_r 上 $df=0$。由假设 f 在此超曲面上限制的临界点集的象具有测度 0，所以 $f(K_r\backslash K_{r+1})$ 的测度为 0。

5 最后对充分大的 r 考虑 r 平坦临界点的集 K_r。证明，若 r 充分大则临界值集 $f(K_r)$ 测度为 0。

为此，将原象空间(已选定局部坐标)中每个 m 维立方体的边 N 等分，从而将此立方体分为 N^m 个全等的小立方体，并且将其中含有 K_r 之点的小立方体取出。它的象不超过 $c(1/N)^{r+1}$（常数 c 不含 N)。所以一切取出的立方体之象将被一些小立方体覆盖，而其总测度不超过

$$c_1N^m(1/N)^{n(r+1)},$$

甚至当所有 N^m 个小立方体均被取出时，也是如此。

当 $r>(m/n)-1$ 时，如果 $N\to\infty$，此数趋于 0，所以 $\operatorname{mes} f(K_r)=0$。

将一切临界点的集合 K 看作 $K\backslash K_1$，$K_i\backslash K_{i+1}$ 和 K_r 之并。我们已证明了每个这样集合的象测度为 0。所以一切临界值集合的测度为 0。▶

G. 二维球面上的结构稳定系统

在转到高于一维的相空间上的系统时，我们首先就会遇到奇点和封闭的相曲线。

定义　向量场的奇点称为蜕化的，如果场在该点的线性化以零为其一固有值。

注　在场有小的变动时，非蜕化奇点不会消失而只是稍有移动(根据隐函数定理)。反之，蜕化奇点在场有小变动时，则场或者分枝(即分裂为几个非蜕化奇点)，或者消失。所以结构稳定系统的所有奇点都是非蜕化的。

定义　向量场的封闭相曲线(环线)称为蜕化的，如果 1 是 Poincaré 映射之固有值，Poincaré 映射即将环线的一条横截直线映为自身的一个映射，而将该横截线上邻近环线的一点沿自该点发出的相曲线映为该相曲线再次与横截线的交点（见图 72)。

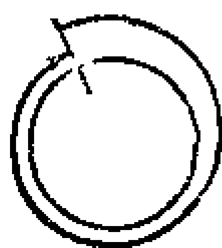


图 72

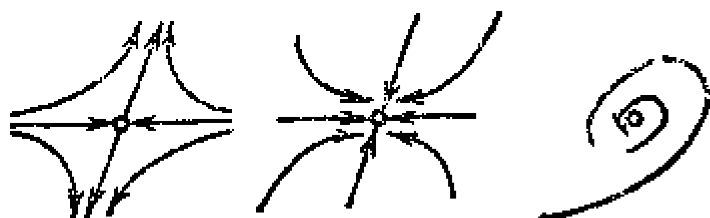


图 73

注　非蜕化环线在场的微小变动下不会消失，而(根据隐函数定理)只是稍许移动。反之，蜕化的环线在场的微小变动下或者分枝(即分为几个非蜕化环线)，或者消失。所以结构稳定系统的一切环线都是非蜕化的。

考虑二维曲面上的向量场。在二维情况下非蜕化奇点在拓扑上或者鞍点或为结点。当 $t\to+\infty$ 时，趋向鞍点的相曲线称为鞍点的**进入分界线**，而当 $t\to-\infty$ 时，趋向鞍点者称为**离去分界线**(图 73)。

定理　二维球面上的向量场由结构稳定系统给出，当且仅当以下各条件均能满足：

(1) 场中只有有限多个奇点；

(2) 场的所有奇点均为非蜕化的；

(3) 鞍点的一切离去分界线均非进入分界线；

(4) 场中只有有限个封闭相曲线；

(5) 一切封闭相曲线均为非蜕化环线[1]。

注　若(1)—(5)中只要有一被破坏，系统即为结构不稳定的，这不难证明(图 74)；而当(1)—(5)成立时，可得结构稳定性，但证明较复杂。详见 De Baggis [1]，M. M. Peixoto，[1]。

---

1) 这一定理在英译本中有重要修改。条件(1)—(5)改为以下四个条件：

(1) 场中一切奇点都是非蜕化的；

(2) 在一切奇点处，场的线性部分的固有值实部均非 0；

(3) 与原来的(3)相同；

(4) 即原来的(5)。

而原来的(4)没有　证明亦未列出　而引用了下文中所列的文献　　译者注

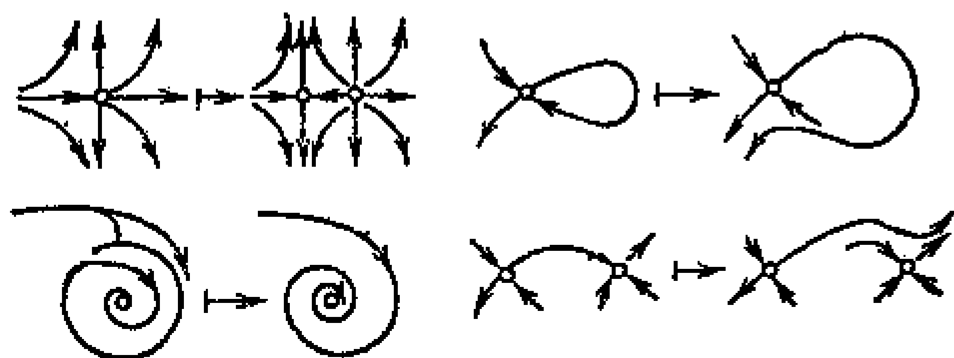


图 74

关于平面上的结构稳定系统可见 De Baggis [2]. M. S. Peixoto, M. M. Peixoto [1].

定理 二维球面上的结构稳定向量场构成其上一切向量场空间的处处稠密开集。

◀此定理可由前述定理得出。▶

注 对于在圆域中的不切于边界圆周的向量场，也有类似的结果成立。

§ 11. 环面上的微分方程

本节中要叙述 Poincaré 和 Denjoy 关于二维环面上无奇点向量场的理论，特别是将描述所有的结构稳定场。

A. 二维环面

n 维环面 T^n 即 n 个圆周的积。二维环面 T^2 也可以看作是一正方形

$$\{(x,y);\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant y\leqslant 2\pi\},$$

而将其对边粘起来(即将点 $(0, y)$ 与 $(2\pi, y)$ 以及 $(x, 0)$ 与 $(x, 2\pi)$ 视为同一点，图 75)。

二维环面 T^2 还可以看作群 $\mathbf{R}^2$ 关于子群 $2\pi\mathbf{Z}^2$ 的傍系集合，$2\pi\mathbf{Z}^2$ 是分量为整数乘以 2π 的向量集合：

$$T^2=\mathbf{R}^2/2\pi\mathbf{Z}^2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \bmod 2\pi\}.$$

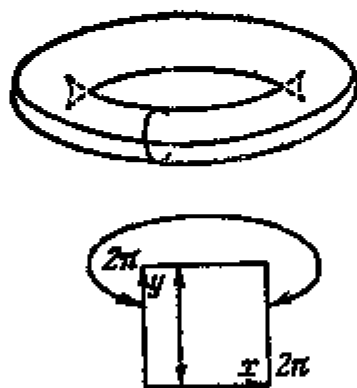


图 75

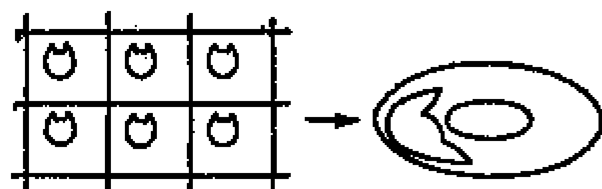


图 76

这样，平面 R^2 覆盖环面，且为局部微分同胚。 覆盖映射 $R^2 \to T^2$ （图 76）使得可以把环面上的每一个图形都移到平面上去（而且重复无穷多次）。环面上的光滑函数对应平面上光滑的，周期为 2π 的函数。

对应于平面上的每一个封闭曲线均有环面上的封闭曲线。但其逆不真：环面上的封闭曲线不只对应于平面上的封闭曲线，还有映射 $\varphi:[0, 1] \to R^2$，但 $\varphi(0) = \varphi(1) \bmod 2\pi$。

这时，若 $\varphi(1)-\varphi(0)$ 的坐标为 $(2\pi p, 2\pi q)$，就说环面上的曲线在沿纬圈转 p 次，沿子午线转 q 次以后封闭。

B. 环面上的向量场

环面上的每一个向量场在平面上定义了一个对两个坐标均以 2π 为周期的场。反之，对应于平面上所有的对两个坐标均以 2π 为周期的场，均有环面上的一个场。

例　方程

$$\dot{x} = \alpha, \quad \dot{y} = \beta,$$

α，β 为常数，在环面上定义了无奇点的向量场。

定理　若比 $\lambda = \beta/\alpha$ 是有理数，则上例的方程在环面上的一切相曲线都是封闭的；而若 λ 是无理数，则这些曲线是处处稠密的。

◀ (1) 令 $\lambda = p/q$. 过点 (x_0, y_0) 的相曲线是 $y - y_0 =$

$\frac{p}{q}(x-x_0)$。若 $x-x_0=2\pi q$，则 $y-y_0=2\pi p$，从而 $(x, y)=(x_0, y_0) \bmod 2\pi$，即是说，相曲线是封闭的。

(2) 我们进一步证明，当 λ 为无理时，相曲线在环面上均匀分布，即在环面的每个区域[1]中停留的时间与该区域面积成正比。这特别意味着，有一段充分长的相曲线可以任意地接近于环面上的任意点，即相曲线处处稠密。▶

C. 均匀分布

均匀分布的一般定义如下。

令 v 是具有固定体积元素的紧光滑流形 M 上的向量场(例如在面积元素为 $dxdy$ 的环面上的场)。我们用 $\mu(D)$ 表示区域 D 的体积(面积)。

考虑方程 $\dot{x}=v(x)$ 的具有初始值 x 的解 φ。用 $\tau(D, T, x)$ 记使得 $\varphi(t)$ 属于区域 D 的那些时间值 $t\in[0, T]$ 集合之测度。

定义 方程 $\dot{x}=v(x)$ 的解称为均匀分布的，如果对任意具有分片光滑边界的区域 D 有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\tau(D, T, x)}{T}=\frac{\mu(D)}{\mu(M)}.$$

定理 当 β/α 为无理数时，方程 $\dot{x}=\alpha$, $\dot{y}=\beta$ 的解在环面上均匀分布。

均匀分布性也可以用函数的时间平均值来定义。

设 f 是 M 上的函数(一般是复值的)。

定义 极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(g^t x)dt=\hat{f}(x)$$

称为函数 f 的时间平均值 (g^t 是相流)。

注 当然，这种极限不一定总是存在；如果存在，则一般地

---

1) 这里"环面的区域"是指 Jordan 可测区域，例如具有分段光滑边界的区域.

依赖于初始点。

环面上的均匀分布定理可由以下的定理得出。

定理（平均值相等定理） 对无理的 $\lambda=\beta/\alpha$，任意连续(或至少为 Riemann 可积)函数 $f: T^2\to\mathbf{C}$ 沿环面上的方程 $\dot{x}=\alpha$，$\dot{y}=\beta$ 之解的时间平均值存在，不依赖于初始点，而且等于其空间平均值：

$$f_0=\frac{1}{4\pi^2}\iint f dxdy.$$

◀取 f 为集 D 的特征函数（在 D 中等于 1 而在 D 外为 0），即可由此定理得到均匀分布定理。▶

D. 平均值相等定理的证明

用 ω 记分量为 (α, β) 的向量。这时以 z 为初值的解是 $z+\omega t$，定理的结论成为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(z+\omega t)dt=\frac{1}{4\pi^2}\iint f(z)dxdy.$$

◀环面上的函数中有形如 $e^{i(k,z)}$ 的环面调和函数，k 是具整数分量的向量。对于它们，定理可以用直接计算积分来证明。令 $k\neq 0$，我们有

$$\int_0^T e^{i(k,z+\omega t)}dt=e^{i(k,z)}\int_0^T e^{i(k,\omega)t}dt=\frac{e^{i(k,z)}}{i(k,\omega)}[e^{i(k,\omega)T}-1].$$

方括弧中的函数是有界的。所以指数 $k\neq 0$ 的 $e^{i(k,z)}$ 的时间平均值为 0。它的空间平均值也是 0。对 $k=0$，$e^{i(k,z)}=1$。它的两个平均值也都是 1。故对环面调和函数定理已经得证。

由环面调和函数的平均值相等可知对于三角多项式亦然：线性组合的平均值等于平均值的同样系数的线性组合。由此，对于 $f=\cos(k, z)$ 和 $\sin(k, z)$，定理得证。

现在对实函数证明此定理；然后，由平均值的线性，即可对复值函数得证。对已给函数 f 用连续函数 P 与 Q 从上下两方逼近：

$P < f < Q$，使得 $\oint\!\!\oint (Q-P)dxdy/4\pi^2 < \varepsilon$。对任意 $\varepsilon>0$ 上述逼近的可能性是 Riemann 可积函数的特性。再用三角多项式 p，q 去逼近函数 P，Q，使得 $|p-P|<\varepsilon$，$|q-Q|<\varepsilon$。

用 p_0，q_0 记这些三角多项式的自由项。p_0，q_0 二数既是 p，q 的空间也是时间平均值（因为对三角多项式两个平均值相等）。于是 f 的空间平均值 f_0 夹在 p_0，q_0 之间：

$$p_0 < f_0 < q_0,\quad q_0 - p_0 < 3\varepsilon.$$

用 p_T，f_T 与 q_T 记 p，f，q 在时间 T 中的平均值：

$$p_T(z) = \frac{1}{T}\int_0^T p(z+\omega t)dt,\ \text{等等。}$$

于是 $p_T(z) < f_T(z) < q_T(z)$ 对任意 T 成立，而对充分大的 T 有

$$|p_T(z) - p_0| < \varepsilon,\quad |q_T(z) - q_0| < \varepsilon,$$

故对充分大的 T 有

$$|f_T(z) - f_0| < 6\varepsilon.\ ▶$$

E. 一些推论

1　环面的二维性在以上没有起作用。考虑 n 维环面上的方程 $\dot{z}=\omega$，$z\in T^n$。如果存在非 0 的整数向量 k，使 $(\omega,k)=0$，则频率向量 ω 称为**共振频率向量**。

若向量 ω 是非共振的，则连续(或至少 Riemann 可积)函数的时间与空间平均值相等，且解为均匀分布。

2　由均匀分布定理可知，数 2^n 的首位数更常为 7 而不是 8。准确些说，用 $N_k(n)$ 记使得 2^m 的首位数为 k 且 $m\leqslant n$ 的自然数值 m 的个数。于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_7(n)}{N_8(n)} = \frac{\lg 8 - \lg 7}{\lg 9 - \lg 8}.$$

3　均匀分布定理的发现是受到以下的 Lagrange 问题的启发：求

$$\omega = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \arg f(t),$$

其中

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\omega_k t}.$$

现在引述对非共振向量 $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 的解。令 $n = 3$. 这时若由三个线段 (a_1, a_2, a_3) 可以作一个三角形,则 $\omega = \Sigma\alpha_k\omega_k/\pi$, α_k 是边 a_k 的对角。

对任意的 n, 解也是频率 ω_k 的加权平均: $\omega = \Sigma W_k\omega_k$. 权 W_k 可以如下计算.记 $W(a_1, \cdots, a_s; b)$为由原点到平面与边形之距离小于 b 的概率,这个 s 边形的边长是 $a_1,\cdots,a_s$, 而边的方向是随机的.这时 $W_k = W(\hat{a}_k, a_k)$ ($\hat{a}_k$ 即在 $a_1,\cdots,a_s$ 中除去 a_k)

证明可见 Weyl [1].

Lagrange 是这样遇见以上问题(平均运动问题)的: 考虑连接太阳和行星椭圆轨道的向量(他称之为 Laplace 向量)。在摄动理论的一级近似之下, Laplace 向量在行星相互引力的影响下,其运动正如一些匀速旋转向量(数目即行星之数目)之和。

Lagrange 计算了太阳系各行星的频率 ω_k 与振幅 a_k, 发现除地球和金星以外,必有一个 a_k 大于其余的和。所以 Lagrange 得以算出地球和金星以外的行星近日点的平均运动。对于地球和金星,都有好几项具有大体相同的振幅.直到二十世纪才由 Bohl, Sierpinski 和 H. Weyl 解决了问题。

F. Poincaré 映射和角函数

考虑环面上的一般微分方程

$$\dot{x} = \omega(x), \quad x \in T^2.$$

设 ω 的场没有奇点,而且 $\omega_1 \neq 0$ (若没有奇点与环线, 则在适当的坐标系下场的第一个分量处处非 0 (见 C. L. Siegel [1]); 不难作出没有奇点,但有环线的场,使之没有这样的坐标系)。

现在我们研究具有双周期右方的非自治方程

$$\frac{dy}{dx}=\lambda(x,y),\ \lambda=\omega_2/\omega_1$$

的积分曲线。

因为它的右方是有界的，所以它的一切解都可以无限拓展。

定义. 上述环面方程的 Poincaré **映射**即将 y 轴映为其自身的一个映射，而将点 $(0,\ y_0)$ 映为以它为初值的解在 $x=2\pi$ 时的值(图 77)。

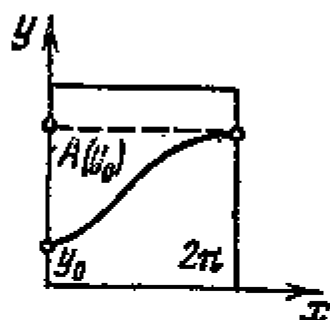


图 77

由解对初值的可微性定理，Poincaré 映射是可微的且有周期的性质：$A(y+2\pi)=A(y)+2\pi$；逆映射 A^{-1} 也是可微的。这样，A 定义了圆周到自身的映射。也可以把 Poincaré 映射看成子午线到其自身的一种映射，而将其上一点映为过此点的积分曲线与同一子午线的下一个交点。

这样，研究环面上积分曲线的性质就归结为研究圆周上的微分同胚的性质。例如设圆周上一个微分同胚有不动点。这时环面上有闭的积分曲线。反之则不正确(例如圆周旋转角 π)。过环面某子午线上一个定点的积分曲线为闭的充分必要条件是，该点是微分同胚的周期点，即作若干次微分同胚后又变为其自身的点。

Poincaré 映射给出了一个圆周到其自身的保持定向的微分同胚，所以它可以写为

$$Ay=y+a(y),\ \text{其中}\ a(y+2\pi)=a(y),\ a'(y)>-1.$$

我们将称函数 a 为**角函数**。

G. 旋转数

旋转数标志了环面上方程的积分曲线之平均斜率。对于最简单的具有常值右方的方程 $\frac{dy}{dx}=\lambda$，旋转数即 λ。

定义 环面上的方程 $\frac{dy}{dx}=\lambda(x,y)$ 的**旋转数**即

$$\mu = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.$$

其中 $\varphi(x)$ 是相应的平面上方程的解。

旋转数可以用角函数表示为

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \lim_{k\to\infty} \frac{a(y) + a(Ay) + \cdots + a(A^{k-1}y)}{k}.$$

按这种形式，定义可以推广到圆周上的任意的保持定向的微分同胚。

定理 旋转数定义中的极限值存在，且与初值无关；它为有理数当且仅当微分同胚的某次幂有不动点（即当且仅当微分方程有闭的相曲线）。

◀1 考虑一点 y 在该微分同胚 k 次作用下的旋转角。记它为

$$a_k(y) = a(y) + a(Ay) + a(A^2y) + \cdots + a(A^{k-1}y).$$

对于任意两点 y_1 与 y_2 有：

$$|a_k(y_1) - a_k(y_2)| < 2\pi.$$

事实上，当 $|y_1 - y_2| < 2\pi$ 时不等式成立，因为直线上的变换 A 和 A^k 把长为 2π 的线段变为长为 2π 的线段。但函数 a_k 以 2π 为周期，所以可将 y_2 改变 2π 的整数倍，使 y_1 与 y_2 的距离小于 2π 而 $a_k(y_2)$ 不变。

2. 令 m_k 为使下式成立的整数：

$$2\pi m_k \leqslant a_k(0) < 2\pi(m_k + 1).$$

今证对任意 y 与任意整数 l 有

$$\left|\frac{a_l(y)}{2\pi kl} - \frac{m_k}{k}\right| < \frac{2}{k}.$$

事实上，由 1 对任意 y 有 $|a_k(y) - 2\pi m_k| < 4\pi$，所以

$$\left|\frac{a_k(y)}{2\pi k} - \frac{m_k}{k}\right| < \frac{2}{k}.$$

但 $\frac{a_{kl}(y)}{2\pi kl}$ 是 l 个数 $a_k(y_i)/2\pi k$，$y_i = A^i y$，$i = 0, \cdots, l-1$

的算术平均值。

3. 用 σ_k 记区间 $\left[\frac{m_k-2}{k}, \frac{m_k+2}{k}\right]$. 我们已证明了，对任意 l, $a_{kl}(y)/2\pi kl$ 位于 σ_k 中。今证对于不同的 k，区间 σ_k 相交。

事实上，$\frac{a_{kl}(y)}{2\pi kl}$ 既在 σ_k 中又在 σ_l 中。

4. 于是 σ_k 的长趋于 0 而且彼此相交。因此它们有唯一的公共点：这就是旋转数。我们已证明了，定义旋转数的极限恒存在而且不依赖于初值。

5. 设 A^q 在圆周上有不动点 y；于是在直线上相应点在 q 次 A 映射之下位移 2π 的整数倍，即 $a_q(y)=2\pi p$。这时对任意 l 有 $a_{ql}(y)=2\pi pl$，所以旋转数是有理数 $\mu=p/q$。

6. 令 $\mu=p/q$。若对一切 y 有 $a_q(y)>2\pi p$，则对某个 $\varepsilon>0$ 对一切 y 有 $a_q(y)>2\pi p+\varepsilon$。

但这时 $\mu>p/q$。若对一切 y 有 $a_q(y)<2\pi p$，则也应有 $\mu<p/q$。于是 $a_q(y)-2\pi p$ 会变号。从而存在 y 使 $a_q(y)=2\pi p$。

注。若旋转数 μ 是无理数，则点 $(y, Ay, \cdots, A^N y)$ 的次序对任意 y 都和旋转一个角 $2\pi\mu$ 的情况一样。事实上，当且仅当 $\mu>p/q$ 时 $a_q(y)>2\pi p$。

还要注意，环面上方程的旋转数依赖于横截于相曲线的圆周(我们记作 y 轴)的选择。

H. 环面上的结构稳定方程

环面上最简单的方程 $\dot{z}=\omega$ 无论 ω 是共振值还是非共振值都是结构不稳定的。

定理 1　环面上的微分方程 $\frac{dy}{dx}=\lambda(x, y)$ 是结构稳定的当且仅当旋转数为有理的而且所有周期解都是非蜕化的[1]。

---

[1] 见 А. Г. Майер [1] 和 В. А. Плисс [1].

◀本定理可从下面的关于圆周上保持定向的微分同胚的类似命题得出。▶

定义 微分同胚 $A: M \to M$ 的 q 阶循环即 q 个点 $(y, Ay, \cdots, A^{q-1}y)$ 所成的集合，这些点彼此互异但 $A^q y = y$。循环称为非蜕化的，若 y 是映射 A^q 的非蜕化不动点(即 1 不是映射 A^q 在 y 点的导数的固有值)。

注 映射 A^q 在同一循环的不同点处的导数是相似的，所以同一循环的所有的点同为蜕化或非蜕化的。

定理 2 圆周上保持定向的微分同胚是结构稳定的，当且仅当其旋转数是有理数而且其一切循环均为非蜕化的。在圆周上保持定向的一切二次可微微分同胚空间 C^2 中，结构稳定微分同胚构成一处处稠密的开集。

于是通有的具有有理旋转数的微分同胚的构造很简单：映射的拓扑型由循环的个数决定，它是一个偶数(因为稳定与不稳定循环的点交替出现)。若旋转数 $\mu = p/q$，则一切循环的阶都是 q。同一循环的各点在圆周上的次序和旋转角 $2\pi\mu$ 这个映射下各点的次序相同。

定理 2 将在 §11 J 中证明。除了用到下述的 Denjoy 的非平凡的定理 (1932) 以外，证明是很简单的。

定理 3 若圆周上一个 C^2 类保持定向的微分同胚有无理的旋转数 μ，则它拓扑等价于圆周上旋转一个角 $2\pi\mu$ 的旋转映射。

上面的理论应归于 Poincaré (1885)；Denjoy 的定理，也是 Poincaré (对右方为三角多项式的方程) 以猜想形式提出的。Denjoy 还给出一些例子说明不能用 C^1 代替 C^2。

I. Denjoy 定理的证明

◀1. 点$\cdots A^{-1}y, y, Ay, A^2y, \cdots$是圆周上映射的轨道。它们的次序和旋转 $2\pi\mu$ 的轨道上各点的次序相同 (见 §11 F)。所以，为了证明定理只需证明映射 A 的轨道在圆周上稠密即可。事实上，

这时只需按连续性拓展变轨道$\cdots A^{-1}y, y, Ay, \cdots$各点为旋转映射轨道的相应点的映射，即可得到变$A$为旋转映射的圆周之同胚。

2. 若圆周上有一段弧其中没有A之轨道的点，则此弧在应用微分同胚A的各次幂后所得的象彼此不相交。事实上，考虑包含该弧而仍无轨道上各点的最大弧。它的所有象仍是最大弧。最大弧的端点属于轨道的闭包。所以它们不可能位于其它最大弧内，即是说，任意两个相交的最大弧必定重合。但若最大弧与其象重合，则其端点必属于一循环而与μ之无理性矛盾。

3. 最大弧的一切象的长度之和有界。所以这弧在A^N与A^{-N}作用下的各个象的长，当$N\to\infty$时趋于0。因此，A的正幂与负幂的 Jacobi 行列式在一最大弧上的积分均趋于0：即若记

$$u_N=\prod_{i=0}^{N-1}\frac{dA}{dy}(A^iy),\quad v_N=\prod_{i=0}^{N-1}\frac{dA^{-1}}{dy}(A^{-i}y),$$

则当$N\to\infty$时，有

$$\int u_N dy\to 0,\quad \int v_N dy\to 0,$$

(在最大弧上积分)。

4. 考虑旋转$2\pi\mu$的轨道之点的序列$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots)$。设$\alpha_q$在$(\alpha_1, \cdots, \alpha_q)$中最接近$\alpha_0$。这时点$\alpha_q, \cdots, \alpha_{2q-1}$与点$\alpha_0, \cdots, \alpha_{q-1}$彼此交错排列。

事实上，考虑弧(α_s, α_{s+q})，$s<q$，其长δ等于α_0到α_q之距离。设α_r在此弧中。若$r<s$，则α_0在弧$(\alpha_{s-r}, \alpha_{s-r+q})$中，故$\alpha_{s-r}$到$\alpha_0$的距离小于$\delta$而与$\alpha_q$的选取矛盾。若$r>s$，则$\alpha_{r-s}$在弧$(\alpha_0, \alpha_q)$上，故$r-s>q$。但这时$\alpha_0$到$\alpha_{s-r-q}$的距离小于$\delta$。于是在$(\alpha_s, \alpha_{q+s})$中没有点$\alpha_r$，$r<2q$，是所欲证。

5. 考虑点$(y, Ay, \cdots, A^{q-1}y)$和$(A^{-1}y, \cdots, A^{-q}y)$。由4，这两个点集交错排列。所以对任一在圆周上有界变差的函数f，对任意点y和任意在§11 Ⅱ的4中定义的q，量

$$\Sigma f(A^iy)-\Sigma f(A^{-j}y),\ 0\leqslant i<q,\ 0<j\leqslant q,$$

从上下两方界于不依赖于y, q的常数。

6. 以 $\ln\left(\frac{dA}{dy}\right)$ 作为 f. 它是有界变差函数，因为 A 是 C^2 类的。因此若按 § 11 I 的 4 选取 q, 量

$$\prod_{i=0}^{q-1} \frac{dA}{dy}(A^i y) \Big/ \prod_{i=1}^{q} \frac{dA}{dy}(A^{-i}y) = u_q v_q$$

将在上，下方各界于一个不依赖于 y, q 的正常数。

7. 上面的结论将与 3. 矛盾，从而证明定理：对 $\sqrt{u_q}$, $\sqrt{v_q}$ 应用 Schwarz 不等式即有

$$\left(\int\sqrt{u_q v_q}\,dy\right)^2 \leqslant \int u_q dy \int v_q dy. \blacktriangleright$$

J. 关于圆周上结构稳定微分同胚的定理之证明

◀1. 若有两个保持定向的圆周上的微分同胚，具有相同的有理旋转数，并且循环的数目也相同，则当所有的循环均为非蜕化时，必存在一个同胚将第一个微分同胚变为第二个。

为证此事需先对第一个微分同胚的某一稳定循环之点对应以第二个微分同胚的任一稳定循环的点，再令其相邻的非稳定循环的点相对应，如此以往使所有循环的点均互相对应(圆周上某一循环中各点的次序如同旋转所成的次序)。然后用下面的很容易证明的引理将此对应拓展到相邻区间上去：

某一区间到其自身的无不动点的同胚均为拓扑共轭的。

2. 如果旋转数是有理的且所有循环都是非蜕化的，则在旋转数有微小改变时，循环个数与循环的非蜕化性均保持不变(由隐函数定理)。所以具有有理旋转数而且一切循环均非蜕化的微分同胚恒为结构稳定的(见 1)。

3. 若一微分同胚有蜕化的循环，则在微分同胚的小的变动下，此循环的各点附近循环的个数可能改变。所以具有蜕化循环的微分同胚是结构不稳定的。

4. 若旋转数是无理的，则微分同胚的任意小摄动也会使它改变。事实上，考虑变动了的微分同胚 $y \longmapsto Ay + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. 由

Denjoy 定理，在某（非光滑的）坐标系下，有

$$z \longmapsto z + 2\pi\mu + \varphi(z), \varphi > 0.$$

所以摄动后的微分同胚的旋转数大于 μ。所以具有无理旋转数的微分同胚是结构不稳定的。

5. 旋转数是微分同胚的连续函数。事实上，$\mu < p/q$，当且仅当应用 q 次微分同胚后，所有的点的移动均小于 $2\pi p$。这个性质在微分同胚的充分小变动下仍然保持。

6. 具有有理旋转数的微分同胚成一稠密集。由 § 11，*J* 的 4，5 以及有理数的稠密性即可得此。

7. 具有有理旋转数的微分同胚的一切循环均可由微分同胚的任意小变动变为非蜕化的。

事实上，在一循环的邻域中，任意小的摄动都可使它成为非蜕化的。令 γ 为一非蜕化循环在圆周上分出的一段圆弧。定义一个光滑函数 φ，使它在 γ 内端点的小邻域之外为 1，而在 γ 之外为 0。令 $A_\varepsilon(y) = A(y) + \varepsilon\varphi(y)$。它的旋转数仍旧，因为循环仍被保存。令 q 为循环的阶数。在 $A\gamma$ 上 $A_\varepsilon^q(y)$ 与 $A^q(y) + \varepsilon$ 在 $A\gamma$ 端点的邻域外相同。

在 $A\gamma$ 上对函数 $A^q(y) - y$ 应用 Sard 引理。我们会看到对几乎所有的 ε，A_ε^q 在 $A\gamma$ 上的所有不动点都是非蜕化的。另一方面映射 A_ε 的每一个循环在弧 $A\gamma$ 上都有代表元。所以，映射 A_ε 的所有循环都是非蜕化的。▶

K. 讨论

1. 前面的定理造成一种印象：圆周上"一般的"微分同胚都有有理的旋转数，而具有无理旋转数的微分同胚只是例外。但是数值试验常给出（至少看来是）处处稠密的轨道。为了讨论这个现象，我们考虑如下一族微分同胚

$$A_{\alpha,\varepsilon}: y \longmapsto y + \alpha + \varepsilon \sin y, \alpha \in [0, 2\pi], \varepsilon \in [0, 1).$$

用 (α, ε) 平面上的一点表示一个微分同胚。容易看到旋转数为 $\mu = p/q$ 的微分同胚的集合将以一对光滑曲线为界，而 q 越大，这

一对曲线将以越尖的舌形趋向 $\varepsilon=0$ 轴。所有这些集的并处处稠密。然而事实是，参数平面相应于有理旋转数的点集的测度，在区域 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，$0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$ 中与整个区域的测度相比较是很小的(图 78)。

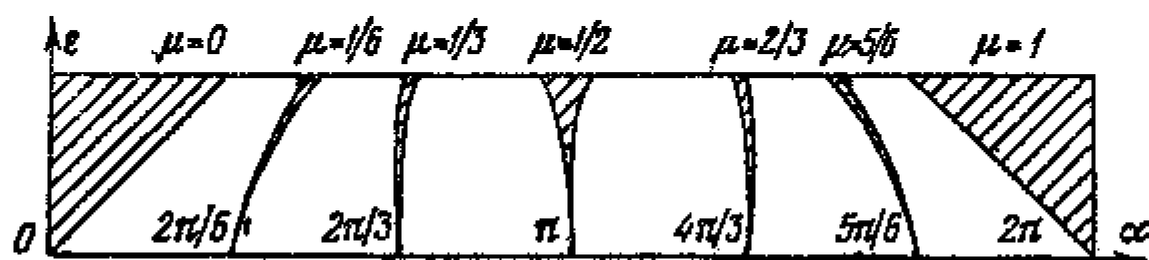


图 78

因此，在此族中随意取一个具有小 ε 的微分同胚，有极大的概率具有无理的旋转数。

此外，类似的结果对任意解析的或充分光滑的近于旋转的一族微分同胚也成立，例如对 $y\longmapsto y+\alpha+\varepsilon a(y)$ 而 a 为任意解析函数：若 ε 很小，其轨道以很大的概率为处处稠密且旋转数是无理的。

2. 由 Denjoy 定理，具有无理旋转数的光滑映射拓扑等价于旋转。问题是，它是否光滑地等价于旋转。

对此问题的回答，当旋转数可用有理数非正常快地逼近时，是否定的 (Finzi)。对旋转光滑等价的问题化为变换的不变测度的光滑性问题。若旋转数是有理的，则不变测度集中在个别点上。若旋转数可用分母不太大的有理数极很快地逼近，则其不变测度可以由集中在个别点处测度逼近得如此快，以至于它相对于 Lebesgue 测度连绝对连续性也没有。所以不能把 Denjoy 定理中的同胚改成微分同胚。

3. 从度量的观点看来，任取一数 μ 为无理数，且不能以分母不太大的有理数过快地逼近，此事概率为 1。例如对任意 ε，以概率 1 存在 $C>0$，使对任意整数 $p,q>0$，有

$$\left|\mu-\frac{p}{q}\right|<\frac{C}{q^{2+\varepsilon}}.$$

所以产生了一个猜测，即 § 11 **K** 的 2 中的现象出现的概率为 0.
我们提出这方面的两个结果：

定理 对几乎所有的 μ，圆周上充分光滑（C^3 或更高类）的以 μ 为旋转数的微分同胚都光滑等价于旋转角度 $2\pi\mu$ (E. Herman, 1976).

"几乎所有"即指旋转数例外集的 Lebesgue 测度为 0.

在 Herman 的定理以前，对近于旋转的映射已有类似的定理和以下结果(1959 年，由 В. И. Арнолд 和 Л. Д. Мечалкин[1]在解析情况下证明；而在 1962, J. Moser 又在光滑情况下证明)：

定理 在充分光滑的族 $y\longmapsto y+\alpha+\varepsilon a(y)$ 中，在区域 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 中使此映射不能用微分同胚化为旋转的 (α, ε) 集合的测度随 ε_0 趋于 0.

这定理对 n 维环面也成立.

这些结果的证明已超出本书范围，然而我们将在下一段中对解析微分同胚这一最简单情况考虑 А. Н. Колмогоров 证明这一类定理的技巧.

L. 用有理数逼近无理数

定理 对任意无理数 μ，存在任意精确的有理逼近，其误差小于分母平方的倒数：

$$\left|\mu-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

例如，π 可以用分子分母均为三位数的有理分数逼近到误差为百万分之一数量级，$\pi\approx 355/113$.

在证明定理之前，先指出求这种逼近的无限序列的几何方法(称为*连分数算法*，或拉鼻子算法，或简称为 Euclid *算法*)

考虑坐标为 (x, y) 的平面（图 79).

作直线 $y=\mu x$. 为确定起见令 $\mu>0$. 在第一象限标出所

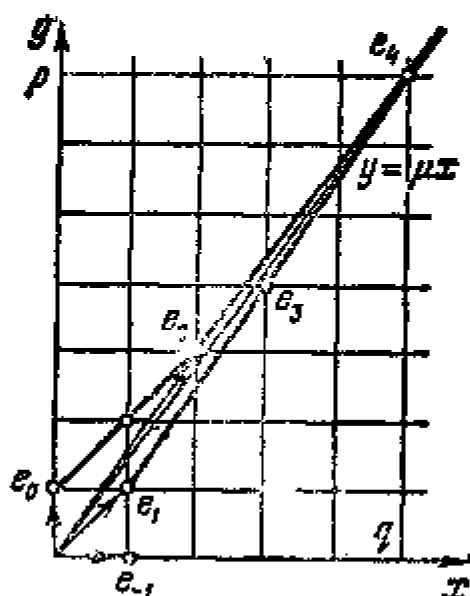


图 79

有整点. 因为 μ 是无理数,所以除 0 以外，整点都不在此直线上. 考虑在此象限中位于直线一侧(其“下”)或另侧(其“上”)的整点的凸包(为了作这些凸包,我们可以假设一条位于此直线上而在无穷远处固定的线. 再设想在此象限的每一个整点除 O 以外都钉上一个钉子，向下(或向上)拉这条线的自由端点 O. 这时这条线将触及某些钉子拉直,这样构成了下(上)凸包的边界). 这样作出的折线的顶点就是无理数 μ 的所求的逼近. 如果整数 (p, q) 是一个顶点的坐标,分数 p/q 就称为 μ 的**收敛分数**. 可证,对任何收敛分数,有

$$\left|\mu-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

为了证明这个不等式，我们用另外的方法来描述这条凸折线的作法. 用 e_{-1} 来记基底向量 $(1, 0)$，而用 e_0 记向量 $(0, 1)$. 这些向量位于直线 $y=\mu x$ 的两侧. 我们再按以下规则作出向量序列: e_1, e_2, $\cdots$. 设已作出了 e_{k-1} 和 e_k，而且它们位于直线两侧. 对 e_{k-1} 加上 e_k 的若干倍使其和恰好与 e_{k-1} 位于 $y=\mu x$ 的同侧.

我们这样作出了一串自然数 a_k 以及一串格点向量

$$e_1 = e_{-1} + a_0 e_0, \cdots, \quad e_{k+1} = e_{k-1} + a_k e_k, \quad \cdots.$$

向量 e_k 就是这两个凸包的顶点（上边的相应于偶数 k，下边的相应于奇数 k）。

引理 向量 (e_{k+1}, e_k) 所张的平行四边形面积为(计及定向) $(-1)^k$。

◀对于最初的平行四边形 (e_0, e_{-1})，这是显然的。下一个平行四边形和前一个有一个公共边和相同的高，但给出平面的相反的定向。▶

推论 用 q_k 与 p_k 记点 e_k 的坐标。则两个相连的收敛分数的差等于

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}.$$

◀通分后分子即 e_{k+1} 与 e_k 所成的行列式，从而等于平行四边形的有向面积。▶

定理之证 ◀向量 e_k 交替地位于直线 $y = \mu x$ 的两侧。

所以，收敛分数交替地大于或小于 μ。从而 μ 与收敛分数的差小于这个收敛分数与下一个收敛分数差的模。由推论，这差的模是 $\frac{1}{q_k q_{k+1}}$，它不大于 $1/q_k^2$，因为当 $k \geqslant 0$ 时，$q_{k+1} \geqslant q_k$。▶

注 数 a_k 称为*不完全商*。收敛分数可以用不完全商表示如下：

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_{k-1}}}}.$$

表达式 $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots}$ 称为*无穷连分数*。在 $\lim \frac{p_k}{q_k} = \mu$ 意义下，μ *可以展为无穷连分数*。

§ 12. 圆周上的解析微分同胚解析化约为旋转

在本节中用 A. H. Колмогоров 的修正 Newton 法来证明关于圆周上的解析微分同胚的定理，这些微分同胚近似于旋转而且有几乎任意的旋转数。

A. 定理的陈述

用 Π_ρ 记带形 $|\mathrm{Im}y|<\rho$. 对于此带中的有界全纯函数 a，记 $\|a\|_\rho=\sup|a(y)|$, $y\in\Pi_\rho$.

令 μ 为无理数，$K>0$, $\sigma>0$. 我们说 μ 是 (K,σ) 型的数，如果对任意的整数 p 和 $q\neq 0$，有

$$\left|\mu-\frac{p}{q}\right|\geqslant K/|q|^{2+\sigma}.$$

定理 存在这样的依赖于 K, ρ, σ 的 $\varepsilon>0$，使得若 a 是以 2π 为周期的解析函数而在实轴上取实值，$\|a\|_\rho<\varepsilon$，而且变换

$$y\longmapsto y+2\pi\mu+a(y)$$

给出圆周上的微分同胚，其旋转数是 (K,σ) 型的 μ，则此微分同胚解析等价于旋转角 $2\pi\mu$.

B. 同调方程

用 R 记旋转一个角度 $2\pi\mu$, H 表示变此旋转为 A 的微分同胚：即是说下图是可交换的：

$$\begin{array}{ccccc} & S^1 & \xrightarrow{A} & S^1 & \\ H & \uparrow & & \uparrow & H \\ & S^1 & \xrightarrow{R} & S^1 & \end{array}$$

即 $H_\circ R=A_\circ H$.

将 H 写作 $Hz=z+h(z)$, $h(z+2\pi)=h(z)$, 则得 h 的函数方程

$$h(z+2\pi\mu)-h(z)=a(z+h(z)).$$

若 A 与旋转相差甚小，则 a 也很小。自然可以设想，h 也是同阶的小量。这时 $a(z+h(z))$ 与 $a(z)$ 之差是比 a 更高阶的小量。所以可得到 h"在一次近似下"所满足的方程

$$h(z+2\pi\mu)-h(z)=a(z).$$

这个线性方程称为**同调方程**。

注 我们可以把所有微分同胚 A 的集合看作一个"无限维流形"，而且有微分同胚 H 所成的"无限维群"作用于其上。这时可把函数 a 解释为微分同胚流形在 R 点的切向量，而把 h 看作群在单位元上的切向量。

用这样的名词，同调方程有如下的意义：a 属于点 R 在群作用下轨道之切空间，当且仅当关于 h 的同调方程可解。

C. 同调方程的形式解

将已知函数 a 和未知函数 h 都展开为 Fourier 级数：

$$a(z)=\Sigma a_k e^{ikz},\quad h(z)=\Sigma h_k e^{ikz}.$$

比较 e^{ikz} 的系数，即得

$$h_k=\frac{a_k}{e^{2\pi ik\mu}-1}.$$

欲使方程可解，其分母只能与分子同时为 0。特别地，若 $a_0\neq 0$，则同调方程不可解。若 $a_0=0$，且旋转数 μ 是无理数，上述公式给出了同调方程在形式 Fourier 级数类中的解。为得其真解，必须研究此级数的收敛性。

D. 解析函数的 Fourier 系数的性态

引理 1 若 f 是以 2π 为周期函数，且在带 Π_ρ 中解析，在其闭包上连续，而且 $\|f\|_\rho\leqslant M$ 则其 Fourier 系数按几何数列下降：

$$|f_k|\leqslant Me^{-|k|\rho}.$$

◀大家知道，

$$f_k = \frac{1}{2\pi}\oint f(x)e^{-ikx}dx.$$

若 $k>0$，将积分路径(向下)移动 $-i\rho$。因为沿所得矩形两个竖边的积分相等，所以积分值不变。于是

$$f_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-i\rho)e^{-ikx-k\rho}dx, \quad |f_k| \leqslant Me^{-k\rho}.$$

$k<0$ 时，只需向上移动 $i\rho$ 即可。▶

引理 2 若 $|f_k| \leqslant Me^{-|k|\rho}$，则函数 $f=\Sigma f_k e^{ikx}$ 在带 Π_ρ 中解析，而且

$$\|f\|_{\rho-\delta} \leqslant 4M/\delta, \text{ 这里 } \delta<\rho,\ \delta<1.$$

$$◀\|f\|_{\rho-\delta} \leqslant \Sigma |f_k||e^{ikx}| \leqslant M\Sigma e^{-|k|\rho}e^{|k|(\rho-\delta)} = M\Sigma e^{-|k|\delta}$$

$$\leqslant 2M/(1-e^{-\delta}) \leqslant \frac{4M}{\delta}. ▶$$

注. 对于 n 元函数，引理 1 仍成立，引理 2 中的 $4M/\delta$ 应换为 CM/δ^n，$C=C(n)$ 是不依赖于 δ 和 f 的常数。

E. 小分母

求解同调方程时需将右方的 Fourier 系数除以 $e^{2\pi ik\mu}-1$。若 μ 是无理数，则当 $k\neq 0$ 时它们均不为 0。然而其中的某些将非常接近于0。事实上，任意数 μ 均有有理逼近 p/q，其误差为 $\left|\mu-\frac{p}{q}\right|<1/q^2$，$q$ 可任意大。$k=q$ 时，分母 $e^{2\pi ik\mu}-1$ 就非常小。

然而这些小分母以概率 1 可以用 k 的幂从下方来估计。

引理 3 令 $\sigma>0$。对几乎一切实数 μ 均存在 $K=K(\mu,\sigma)>0$，使得对一切整数 p 与 $q\neq 0$，均有

$$\left|\mu-\frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{K}{|q|^{2+\sigma}}.$$

◀考虑区间 [0, 1] 上使上式不成立(对固定的 p, q, K, σ)

的 μ. 这些数构成长度不超过 $\frac{2K}{|q|^{2+\sigma}}$ 的线段。这些线段当 p 取一切值 ($q>0$, K, σ 固定)时,其并集总长度不超过 $2K/q^{1+\sigma}$. 对 q 求和即得测度不超过 CK 的集, $C=2\Sigma q^{-(1+\sigma)}<\infty$. 因此使引理中的 K 不存在的数 $\mu\in[0,1]$ 之集合将由测度任意小的集覆盖. 即是说此集有测度 0 (在区间 $[0,1]$ 中如此, 对所有实数而言也是如此). ▶

注 满足以上不等式的数 μ 在 § 12 A 中称为 (K,σ) 型的数。

对于 (K,σ) 型的数 μ, 其小分母有以下的下方估计:

$$|e^{2\pi ik\mu}-1|\geqslant K/(2|k|^{1+\sigma})\quad(|k|>0).$$

◀事实上, $k\mu$ 到最近整数的距离可用 $K/|k|^{1+\sigma}$ 从下方估计, 而单位圆的弦长不短于其所张的劣弧除以 π. ▶

F. 同调方程的研究

令 a 为以 2π 为周期的解析函数且平均值为 0.

引理 4 对几乎所有 μ 同调方程有周期为 2π 的解析解 (若 a 为实函数时,有实解). 存在一常数 $\nu=\nu(K,\sigma)>0$, 使若 μ 是 (K,σ) 型的, 则对任意小于 ρ 的 $\delta>0$, 以及任意的 $\rho<1/2$, 有

$$\|h\|_{\rho-\delta}\leqslant\|a\|_{\rho}\delta^{-\nu}.$$

注 由 a 变到 h 将使函数性质变坏,但不甚于微分 ν 次. 由 Taylor 系数的 Cauchy 估计有 $\left\|\frac{d^{\nu}f}{dz^{\nu}}\right\|_{\rho-\delta}\leqslant C\|f\|_{\rho}\delta^{-\nu}$, 注意到这一点是有好处的. 不顾及函数微分 $|\nu|$ 次后的变坏,可以说同调方程的解 h 与其右方 a 是同阶小量.

◀1. 由引理 1, 若 $\|a\|_{\rho}\leqslant M$, 则 $|a_k|\leqslant Me^{-|k|\rho}$.

2. 因为 μ 是 (K,σ) 型的,故 $|h_k|\leqslant 2Me^{-|k|\rho}|k|^{1+\sigma}/K$.

3. 函数 $x^m e^{-\alpha x}(x\geqslant 0)$ 在点 $x=m/\alpha$ 取最大值. 所以对任意 $\alpha>0$, $x>0$, 有 $x^m e^{-\alpha x}\leqslant C\alpha^{-m}$, $C=(m/e)^m$. 因此对任

意 $\alpha > 0$，有

$$|k|^{1+\sigma}e^{-\alpha|k|} \leqslant C\alpha^{-m},\ m = 1+\sigma.$$

4. 所以 $|h_k| \leqslant Me^{-|k|(\rho-\alpha)}2CK^{-1}\alpha^{-m}$. 由引理 2，$\|h\|_{\rho-\delta} \leqslant DM$，$D = 8C/K\alpha^m(\delta-\alpha)$。取 $\alpha = \delta/2$，则当 ν 充分大时，因 $\delta < 1/2$，而有 D 不超过 $\delta^{-\nu}$。▶

G. 逐次逼近的作法

我们来求解右方为 $\tilde{a} = a - a_0$ 的同调方程（a_0 是 a 的平均值）。记解为 h^0，用公式 $H_0z = z + h^0(z)$ 来定义映射 H_0。作映射 $A_1 = H_0^{-1}\circ A\circ H_0$。再由关系式 $A_1z = z + 2\pi\mu + a^1(z)$来定义函数 a^1。

换言之，我们在圆周上引入了新坐标 $z_1(z = H_0(z_1))$，并用新坐标表出了映射 A。得出了映射 $z_1\longmapsto A_1z_1$。它与旋转一个角 $2\pi\mu$ 相差一个"不匹配量" a^1。

再从 A_1 而不是 A 出发，可用同样作法作出以下各次逼近。作 h^1 与变换 H_1，把 A_1 变为 $A_2 = H_1^{-1}\circ A_1\circ H_1$。

这样得到一串变换 H_n。考虑变换 $\mathscr{H}_n = H_0\circ H_1\circ\cdots\circ H_{n-1}$，我们有 $A_n = \mathscr{H}_n^{-1}\circ A\circ\mathscr{H}_n$。

事实是：当 μ 为 (K,σ) 型数而且 $\|a\|_\rho$ 充分小时，序列 $\mathscr{H}_n$ 收敛。其极限变换 $\mathscr{H}$ 变初始映射为 $\mathscr{H}^{-1}\circ A\circ\mathscr{H} = \lim A_n$，即旋转一个角 $2\pi\mu$。

H. 一次近似后不匹配量的估计

引理 5 存在只依赖于 K，σ 的常数 χ，$\lambda > 0$，使对区间 $(0,\rho)\left(\rho < \frac{1}{2}\right)$ 中任意的 δ，有

$$\|a\|_\rho \leqslant \delta^\chi \Rightarrow \|a^1\|_{\rho-\delta} \leqslant \|a\|_\rho^2\delta^{-\lambda}.$$

注 这意味着，在第一次变量变换后，不匹配量 a^1 和原来的与旋转的差异 a 相比是二阶小量（不计其型由于 λ 次微分而得的恶化）。因此，在上面的逐步逼近格式中，下一次逼近的误差是前

一次误差的平方级的. n 次逼近后,即得 ε^{2^n} 级的误差,这里 ε 是初始(零次)近似的误差.

这类收敛性,正是 Newton 切线法(图 80)的特征,使我们能克服每一步所出现的小分母(就是使情况恶化的因子 $\delta^{-\lambda}$)的影响. 这种处理小分母的方法是 A. H. Колмогоров 于 1954 年发明的.



图 80

◀1° 设 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ (或 $\mathbf{R}^n$) 中的凸区域, $h:\Omega\to\mathbf{C}^n$ (或 $\mathbf{R}^n$) 是光滑映射,而且

$$\|h_*\|=\sup_{x\in\Omega}\|h_*(x)\|<1.$$

这时变 x 为 $x+h(x)$ 的映射 H 是由 Ω 到 $H\Omega$ 上的微分同胚.

◀ $H_*(x)$ 的固有值不为 0, 所以 H 是局部微分同胚. 由于 $\|h_*\|<q<1$ 且 Ω 为凸区域,故 h 为压缩映射. 所以两个不同点在映射 H 下的位移之差小于它们的距离,故它们的象也不同,即是说 H 是 1 对 1 的.

2° 现证若 $\varkappa$ 充分大,则映射 A_1 在带 $\Pi_{\rho-\delta}$ 中解析.

◀令 $\|a\|_\rho\leqslant M=\delta^\varkappa$. 于是 $|a_0|\leqslant M$, $\|\tilde a\|_\rho\leqslant 2M$. 由 § 12 F 的定理, 有 $\|h^0\|_{\rho-\alpha}\leqslant 2M\alpha^{-\nu}$. 于是

$$\left\|\frac{dh^0}{dz}\right\|_{\rho-2\alpha}\leqslant 2M\alpha^{-(\nu+1)}.$$

取 $\alpha=\delta/8$. 若 $\varkappa$ 充分大,则由前面的不等式,有

$$\|a\|_\rho<\alpha,\quad \|h^0\|_{\rho-\alpha}<\alpha,\quad \left\|\frac{dh^0}{dz}\right\|_{\rho-2\alpha}<\alpha.$$

于是由 1° 知 H_1 是带 $\Pi_{\rho-2\alpha}$ 上的微分同胚,其象包含带 $\Pi_{\rho-3\alpha}$.

现在 $H_0\Pi_{\rho-\delta}\subset\Pi_{\rho-\delta+\alpha}$, $A\circ H_0\Pi_{\rho-\delta}\subset\Pi_{\rho-\delta+2\alpha}\subset\Pi_{\rho-3\alpha}$. 因此微

分同胚 H_0^{-1} 在 $A\circ H_0\Pi_{\rho-\delta}$ 上有定义。即是说映射 $A_1=H_0^{-1}\circ A\circ H_0$ 在 $\Pi_{\rho-\delta}$ 中解析并在其上为微分同胚。▶

3° 我们来估计不匹配量 a^1. ◀定义 a^1 的可交换图式给出

$$z+2\pi\mu+a^1(z)+h^0(z+2\pi\mu+a^1(z))\equiv z+h^0(z)+2\pi\mu+a(z+h^0(z)).$$

由同调方程有

$$a^1(z)=[a(z+h^0(z))-a(z)]-[h^0(z+2\pi\mu+a^1(z))-h^0(z+2\pi\mu)]+a_0.$$

可以用中值定理和 Cauchy 不等式来估计第一个方括号。由 2°，有

$$\|a(z+h^0(z))-a(z)\|_{\rho-\delta}\leqslant\frac{M}{\delta}\|h^0\|_{\rho-\delta}\leqslant M^2\delta^{-\varkappa},$$

常数 $\varkappa$ 只依赖于 ν，即只依赖于 K 和 σ。

第二个方括号可类似地估计：

$$\|[\ ]\|_{\rho-\delta}\leqslant 2M\alpha^{-(\nu+1)}\|a^1\|_{\rho-\delta}\leqslant M\delta^{-\varkappa_1}\|a^1\|_{\rho-\delta}.$$

所以

$$\|a^1\|_{\rho-\delta}(1-M\delta^{-\varkappa_1})\leqslant|a|_0+M^2\delta^{-\varkappa}. \ ▶$$

4° 现在估计 $|a_0|$。我们利用 A 与 A_1 的旋转数均为 $2\pi\mu$。

◀由此可知 a^1 在某实点 z_0 上为 0。以 z_0 代入 $a^1(z)$ 的公式。我们得出 $a_0=a(z_0)-a(z_0+h^0(z_0))$，从而 $|a_0|\leqslant M^2\delta^{-\varkappa}$ (见 3°)。▶

5° 由 3°，4° 中的估计，可知 $\|a^1\|_{\rho-\delta}\leqslant 4M^2\delta^{-\varkappa}$。▶

I. 逼近系统的收敛性

1° 我们将在半径为 ρ_n (它随 n 的增加而减小：$\rho_0=\rho$，$\rho_n=\rho_{n-1}-\delta_{n-1}$) 的带上考虑第 n 步近似中作出的映射 A_n。

我们取如下逐步缩小的数列 δ_n：

$$\delta_n=\delta_{n-1}^{3/2},\ \delta_0<1/2.$$

这时对充分小的 δ_0 将有 $\sum\delta_n<\rho/2$。

2° 作数列 M_n：

$$M_n = \delta_n^N.$$

N 充分大，并将在以下选定(只依赖于K和σ)．注意，$M_n = M_{n-1}^{3/2}$．

3° 假设 $\|a\|_\rho \leqslant M_0$．我们证明 $\|a^n\|_{\rho_n} \leqslant M_n$．

◀按命题 3，若 $N > \chi$，则

$$\|a^1\|_{\rho_1} \leqslant M_0^{\lambda}\delta_0^{-\lambda} = \delta_0^{N-\lambda}.$$

但若 $N > 2\lambda$，则 $\delta_0^{N-\lambda} < \delta_1^N = \delta_0^{3N/2}$．取$N$ 大于 2λ 和 χ．这时可得

$$\|a^1\|_{\rho_1} \leqslant \delta_1^N = M_1.$$

由 a^{n-1} 过渡到 a^n 亦与此类似．▶

4° 今证乘积 $\mathscr{H}_n = H_0 \circ H_1 \circ \cdots \circ H_{n-1}$ 在 $\Pi_{\rho/2}$ 中的收敛性．

微分同胚 H_0 在 Π_{ρ_1} 中解析并满足不等式

$$\|h^0\|_{\rho_1} \leqslant \delta_0, \left\|\frac{dh^0}{dx}\right\|_{\rho_1} \leqslant \delta_0$$

(见 2° 第三段)．

完全同样对于 H_{n-1} 可得

$$\|h^{n-1}\|_{\rho_n} \leqslant \delta_{n-1}, \left\|\frac{dh^{n-1}}{dx}\right\| \leqslant \delta_{n-1}.$$

因此 $\mathscr{H}_n$ 在 Π_{ρ_n} 中解析，其导数上下分别界于 $C = \prod(1+\delta_k)$ 和 $c = \prod(1-\delta_k)$．

由此可得，$\mathscr{H}_n$ 是 Π_{ρ_n} 上的微分同胚，而且序列 $\mathscr{H}_n$ 在 $\Pi_{\rho/2}$ 中收敛．事实上

$$\|\mathscr{H}_n - \mathscr{H}_{n+1}\|_{\rho/2} \leqslant C\|h^n\|_{\rho/2} \leqslant C\delta_n.$$

用 $\mathscr{H}$ 记序列 $\mathscr{H}_n$ 的极限．在式 $A \circ \mathscr{H}_n = \mathscr{H}_n \circ A_n$ 中求极限可得 $A \circ \mathscr{H} = \mathscr{H} \circ \mathrm{u}$，$\mathrm{u}$ 是旋转一个角 $2\pi\mu$．证毕．▶

J. 注记

1° J. Moser 指出，将上述逼近与 Nash 的光滑化手续结合起来可以在有限光滑性情况下证明类似定理(见 J. Moser[1])．

在 Moser 最初的工作中要求几百阶的可微性．由于 Moser 和 Russmann 进一步的努力，导数的阶数降低了 (见 H. Russ-

mann [1]).

2° 在高维情况不能定义旋转数。但在 a 很小的映射族 $y \longmapsto y + \alpha + a(y)$, $y \in T^n$ 中,对大多数 α 映射光滑等价于平移 $y \longmapsto y + 2\pi\mu$. 特别是对于解析族 $y \longmapsto y + \alpha + \varepsilon a_1(y) + \varepsilon^2 a_2(y) + \cdots$, 则对几乎每一个 μ 都存在解析函数 $\alpha(\varepsilon) = 2\pi\mu + \varepsilon\mu_1 + \cdots$, 使得映射 $y \longmapsto y + \alpha(\varepsilon) + \varepsilon a_1(y) + \cdots$ 在解析变换 $y = z + \varepsilon h_1(z) + \cdots$ 下变为 $y \longmapsto y + 2\pi\mu$.

比较 ε 的同次幂，即可得出系数 $h_1, \cdots$. 但这样得到的 ε 的级数的收敛性只能用 Newton 逼近间接地得出.

3° 看来似乎可能有： 圆周的解析同胚解析等价于无理的旋转当且仅当这个微分同胚的各次幂的不动点不聚集在实轴上. 也可以设想对于某些可用有理数逼近得异常好的无理数 μ, § 12 J 的 2° 中的函数 $\alpha(\varepsilon)$甚至不光滑(即令在一维情况下也是这样).

§ 13. 双曲理论初步

在本节中将证明 Аносов 关于环面的自同构的结构稳定性的定理以及 Grobman-Hartman 关于鞍点的结构稳定性的定理.

A. 最简单的例: 环面的线性自同构

具有高维相空间的微分方程定义了很大一类结构稳定系统, 其中每一条相曲线位于相邻相曲线之间, 就如同鞍点位于相邻双曲线之间一样. 我们从最简单的例子开始(图 81).

考虑环面 T^2 的自同构 A, 它是由平面上的整数元么模 (即行列式为 1) 矩阵

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

给出的. 格点 $2\pi Z^2$ 在 $\hat{A}$ 作用之下仍变为自身. 所以平面上的等价(即 mod2π 为合同的)点仍变为等价点. 所以 $\hat{A}$ 定义了环面到自身的映射 A. 因为 $\det \hat{A} = 1$, 所以逆矩阵也是整数元

的。所以 A 是环面到自身的自同构。此外，A 还是群 $T^2=\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ 的自同构。

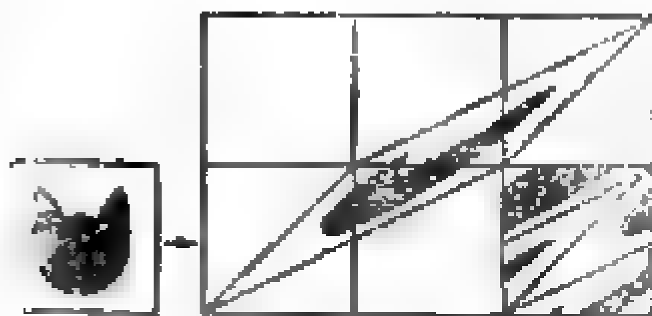


图 81

B. 环面自同构的性质

如果映射 A 把一个有限集循环地重排，这个有限集就称为 A **的循环**。

定理 1 环面的自同构 A 具有可数个循环。当且仅当一点的两个坐标都是 2π 的有理倍数时，它们才是 A 的循环中的点。

◀1° 固定整数 N，环面上坐标为 2π 的有理数倍（且此有理数分母为 N）的点成一有限集。A 变此集为自身。因此此集中的点均属于循环。

2° 令 $2\pi\xi$ 为阶数 $n>1$ 的循环中之点。这时 $\hat{A}^n\xi=\xi+m$，m 为整数向量。所得的关于 ξ 的线性方程行列式非 0。所以 ξ 的分量是有理数。▶

定理 2 自同构 A 的迭代将任意区域 G 均匀地“涂抹”在环面上：即对任意区域 G 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{mes}(A^nF)\cap G}{\operatorname{mes}F}=\frac{\operatorname{mes}G}{\operatorname{mes}T^2},$$

A 的这个性质称为**混合性**；它对任意可测集 F 与 G 成立。

◀这个关系可用环面上的函数表示为

$$\lim_{n\to\infty}(A^{n*}f,\ g)=(f,\ 1)(1,\ g)/(1,\ 1),$$

其中

$$(u,v)=\int u(x)\bar{v}(x)dx,\ (A^{n*}f)(x)=f(A^n x).$$

现在令 f 为指数函数：$f=e^{i(p,x)}$. 这时 $A^{n*}f$ 也是指数函数，而波向量是 $p'=\hat{A}^{n\prime}p$. 若 $p\neq 0$，则点 p 在 $\hat{A}^{n\prime}$ 作用下的轨道是无穷的. 所以对任意的指数函数 $g=e^{i(q,x)}$，有

$$\lim_{n\to\infty}(A^{n*}f,\ g)=0.$$

用指数函数之和对 f 与 g 作平方平均逼近即可. ▶

混合性质的另一个更有启发的证明(但较难准确进行)如下.

定理 3 在环面上存在两个对自同构 A 不变的方向场. 它们的积分曲线各在环面上稠密. 自同构 A 将第一个场的积分曲线放大 $\lambda>1$ 倍而仍为该场的积分曲线,将第二个方向场的积分曲线缩小 λ 倍(图 82).

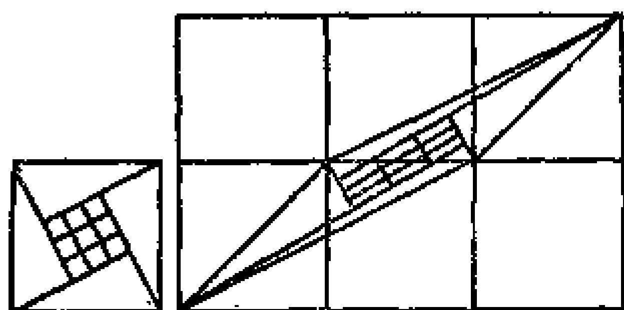


图 82

◀ 考虑变换 $\hat{A}$ 的固有值 $\lambda_{1,2}=(3\pm\sqrt{5})/2$. 很显然 $\lambda_1>1>\lambda_2$，而且 λ_1，λ_2 都是无理数. 考虑平面上所有平行于变换 $\hat{A}$ 的第一个固有向量的直线. 因为 λ_1 是无理的，固有向量的两个分量不可公约. 所以此族中的直线决定环面上一族处处稠密的围绕线. 平面变换 $\hat{A}$ 将此族中的直线放大 $\lambda_1>1$ 倍而仍为族中的直线. 所以环面变换把这族围绕线用同样的倍数放大为族中的围绕线. 这个性质称为变换 A 的**膨胀叶层构造**.

同样,第二个固有方向定义**压缩叶层构造**. ▶

现在考虑平面区域 $\hat{P}$ 在平面变换 $\hat{A}^n$ 下的象. 这个变换定

义一个双曲旋转，在第一个固有方向上放大 λ_1^n 倍，而在另一个固有方向上缩小 λ_2^n 倍。所以当 n 很大时，区域 $\hat{F}$ 的象是沿第一个固有方向的狭长带形。从而环面的区域 F 在变换 A^n 下的象也是一个狭长带形，它接近于具有非共振向量 ω 的方程 $\dot{x}=\omega$ 相曲线上很长的一段。这意味着当 n 增大时，象 A^nF 会与环面上任意区域 G 相交；用这样的证法，不费什么力气就可以得出混合性质。

C. 环面的自同构的结构稳定性

在六十年代发现了一个惊人的事实，它是近几十年来微分方程理论中最重要的成就之一。这就是，上面讲的环面自同构在环面的所有微分同胚类中是结构稳定的。特别是，所有充分接近于 A 的微分同胚都有可数多个循环与处处稠密的周期点。

Аносов 定理 由矩阵 $\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ 所给出的环面的自同构 A: $T^2\to T^2$ 在 C^1 拓扑下是结构稳定的。换言之，每一个连同一阶导数都充分接近于 A 的微分同胚 B 都可借助于一个同胚 H 而共轭于 A，即 $B=H^{-1}\circ A\circ H$。

注. 若 B 足够接近 A，则同胚 H 可以选得任意接近于恒等映射，但一般不可能光滑。

Аносов 定理指出，对有高维相空间的系统，相曲线的性态可能不是被吸引到稳定平衡位置或闭的环线，但在小摄动之下仍不改变，这一点与二维球面或环面上的向量场不同。动力系统的这种性态比自振动更为复杂，其物理意义将在以下讨论。Аносов 定理的证明见 § 13，D—G。

D. 同调方程

求一同胚 H，$H(x)=x+h(x)$，使得下图式为可交换的：

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{R}^2 & \xrightarrow{B} & \mathbf{R}^2 \\
H \uparrow & & \uparrow H, \\
\mathbf{R}^2 & \xrightarrow[A]{} & \mathbf{R}^2
\end{array}
$$

其中 $B(x) = Ax + f(x)$，函数 f 和 h 对 x 以 2π 为周期。

由上图可得 h 的非线性方程满足：

$$h(Ax) - Ah(x) = f(x + h(x)).$$

设函数 f 很小，h 和 f 为同阶小量。从而若将右方换为 $f(x)$，即舍去"二阶小量"，可以得到线性化的方程，它称为**同调方程**

$$h(Ax) - Ah(x) = f(x).$$

E. 同调方程之解

同调方程的左方对 h 是线性的。用 L 表示变 h 为同调方程左方的线性算子。同调方程的解形如 $h = L^{-1}f$。只需证明算子 L 可逆即可。

引理 1 环面上的向量场空间可分为两个子空间的直和，它们对 L 都是不变的。

◀平行于 A 的第一、二个固有方向的向量场空间在此变换下都不变，而每一个向量场又都可以唯一地分解为指向固有方向的向量场之和。▶

令 $f = f_1e_1 + f_2e_2$，$h = h_1e_1 + h_2e_2$ 为 f 与 h 的分解。这时同调方程可以化为方程组

$$h_1(Ax) - \lambda_1h_1(x) = f_1(x),$$
$$h_2(Ax) - \lambda_2h_2(x) = f_2(x),$$

这里 $\lambda_1 = \lambda_2^{-1} > 1 > \lambda_2 = \lambda$ 是固有值。

考虑环面上连续函数空间上的算子 S，其定义是对变元作用以变元平移算子 A，即定义 S 为

$$(Sg)(x) = g(Ax), \ \|S\| = 1, \text{我们有} \ \|S^{-1}\| = 1.$$

同调方程可以写为

$$(S - \lambda_iE)h_i = f_i, \ i = 1, 2,$$

E 表示恒等算子。

令 $i=1$。这时

$$(S-\lambda_1 E)^{-1}=-\lambda(E+\lambda S+\lambda^2 S^2+\cdots).$$

因为 $\lambda<1$，而 $\|S\|=1$，所以逆算子是存在的，而且

$$\|(S-\lambda_1 E)^{-1}\|\leqslant \lambda/(1-\lambda).$$

与此类似

$$(S-\lambda_2 E)^{-1}=S^{-1}(E-\lambda S^{-1})^{-1}=S^{-1}(E+\lambda S^{-1}$$
$$+\lambda^2 S^{-2}+\cdots),\ \|(S-\lambda_2 E)^{-1}\|\leqslant 1/(1-\lambda).$$

这样算子 L^{-1} 存在，而且 $\|L^{-1}\|\leqslant 1/(1-\lambda)$，同调方程于是解出。

F. 映射 H 的作法

§13，D 中的非线性函数方程现在可用简单的压缩映象原理解出。令

$$\Phi(h)(x)=f(x+h(x))-f(x).$$

则此函数方程可写为

$$Lh=\Phi h+f,\ h=L^{-1}\Phi h+L^{-1}f.$$

引理 2 若 f 的 C^1 范数充分小，则算子 $L^{-1}\Phi$ 是 C^0 空间的压缩映射。

◀ 只需证明非线性算子 Φ 满足一个具有小常数的 Lipschitz 条件即可。事实上，由 §13，E 有

$$\|L^{-1}\Phi h^1-L^{-1}\Phi h^2\|\leqslant \|\Phi h^1-\Phi h^2\|/(1-\lambda).$$

另一方面

$$\|\Phi h^1-\Phi h^2\|=\max|f(x+h^1(x))-f(x+h^2(x))|$$
$$\leqslant \|f\|_{C^1}\|h^1-h^2\|.$$

所以，当 $\|f\|_{C^1}<1-\lambda$ 时，算子 $L^{-1}\Phi$ 是压缩映射。▶

在此条件下可解出方程，并作出了 H。

G. 映射 H 的性质

我们要证明 H 是环面的同胚。

◀若 h 在 C^1 度量下很小，映射 $H=E+h$ 是同胚。我们只知道 h 在 C^0 度量下很小。虽然如此，由平面映射 $\hat{A}$ 的双曲性质，和 $H(x)=H(y)$，可得 $x=y$.

事实上，在平面上 $\hat{B}\hat{H}=\hat{H}\hat{A}$. 所以 $\hat{H}\hat{A}\hat{x}=\hat{H}\hat{A}\hat{y}$，而一般地有 $\hat{H}\hat{A}^n x=\hat{H}\hat{A}^n y$. 但由 $\hat{A}$ 的双曲性，$\hat{A}^n x$ 与 $\hat{A}^n y$ 的距离除非 $\hat{x}=\hat{y}$，则或当 $n\to+\infty$、或当 $n\to-\infty$ 时，趋向无穷. 这与 h 的有界性矛盾. 于是 $\hat{x}=\hat{y}$，亦即在环面上有 $x=y$.

现证 H 的象是整个环面. 事实上平面上的充分大圆在 $\hat{H}$ 下的象包含了一个半径为 2π 的圆（因为 h 有界）. 所以 $HT^2=T^2$. 从而 H 是环面的同胚. 此外 $BH=HA$. ▶

§ 13 **C** 的定理证毕.

H. 鞍点的结构稳定性定理

用以上的讨论也可以证明以下命题.

Grobman-Hartman 定理. 令 $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是一线性映射，它没有模为 1 的固有值. 这时一切局部微分同胚 $B:(\mathbf{R}^n,0)\to(\mathbf{R}^n,0)$，只要它在不动点 O 处的线性部分为 A，均在点 O 充分小邻域中拓扑等价于 A.

◀ 局部微分同胚 B 在 O 附近总与如下作出的整体微分胚 $C:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 重合. 令 φ 为一光滑函数，在点 O 的 1-邻域外为 0 而在点 O 的小邻域中为 1. 这时定义 C 在 ε-邻域(即 $\varphi_\varepsilon\neq 0$ 处)外即为 A，而在此邻域内定义 $C=A+\varphi_\varepsilon\cdot(B-A)$; $\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(x/\varepsilon)$.

以上 Аносов 定理的证明指出，所有 C^1-接近于 A 的微分同胚: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 都拓扑等价于 A. 但差 $C-A$ 在适当选取 $\varepsilon>0$ 后可以成为 C^1-小量，因为在零的 ε-邻域中有

$$|B-A|\leqslant c\varepsilon^2,\ |(B-A)'|\leqslant c\varepsilon.$$

所以 C 拓扑等价于 A.

但 C 和 A 一样只有一个不动点 O. 因此，变 A 为 C 的同胚保持 O 不动. ▶

§ 14. У-系统[1]

在本节中将定义 Аносов 同胚与 Аносов 流(或称 У-微分同胚和 У-流). 我们还将讨论它在负曲率流形上的测地流理论以及其它问题上的应用.

A. Anosov 微分同胚的定义

对上述环面上的微分同胚作分析表明在上面的论证中只有膨胀和收缩叶层构造才是本质的; 所以可以引进一种双曲微分同胚的一般概念,而不必假设 M 是环面.

设 $A: M \to M$ 是紧流形上的微分同胚. 设

(1) M 在每点的切空间都可以分为两个子空间的直和:

$$T_xM = X_x \oplus Y_x;$$

(2) 平面场 $X = \{X_x\}$ 和 $Y = \{Y_x\}$ 对 x 连续而且对于 A 不变.

(3) 在某个 Riemann 度量下, A 压缩第一场中的平面而放大第二场的平面: 即存在一正数 $\lambda < 1$, 使对 M 的任意点 x 有

$$\|A_*\xi\| \leqslant \lambda\|\xi\|, \quad \forall \xi \in X_x,$$

$$\|A_*\eta\| \geqslant \lambda^{-1}\|\eta\|, \quad \forall \eta \in Y_x.$$

这时就说 A 是一个 Аносов **系统**.

例 设 M 是环面,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

是环面的自同构, A 是 Аносов 系统.

事实上, 相应的平面自同构的固有方向在环面上定义了两个不变方向场: 膨胀的和收缩的.

注 1. 可将上述不等式代以下面的条件, 它看上去更弱:

$$\|A_*^n|_X\| \leqslant c\lambda^n, \; n > 0; \quad \|A_*^n|_Y\| \leqslant c\lambda^{-n}, \; n < 0.$$

若此条件对某种度量成立, 则对任意其它度量也成立 (c 可能改

1)英译本作 Anosov 系统。——译者注

变）. 由此即可得出以上的不等式（可能在其它度量下）.

2. 定义中并未要求平面场 X 与 Y 的光滑性环面上接近于自同构

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的微分同胚都是 Аносов 系统，但即令此微分同胚是解析的，其压缩与膨胀方向场也可能不属于 C^2 类（高维情况下甚至可能不属于 C^1 类）.

3. У-系统的定义与名称都是 Д. В. Аносов 提出的. 这个名词中的 У 是俄文 Условие（条件）一词的第一个字母. Аносов 将条件的 1 -3 称为 У 条件，并建议英文译作 C 条件；У 微分同胚和 У 梯级这些名词也是他建议的. 但 Smale 提议用 Аносов 微分同胚等名词[1].

B. Аносов 微分同胚的性质

定理（Аносов） Аносов 微分同胚均为结构稳定的.

证法与 §. 13 中关于环面的自同构的相应定理证法相同；详见 J. Mather [1] 一文.

最早的证明用到 Аносов 微分同胚的以下性质：

定理 Аносов 微分同胚的压缩与膨胀平面场为完全可积.

换言之，存在压缩与膨胀叶层结构[2]使其切平面构成压缩与放大平面场. 注意，在这里不能用 Frobenius 定理，因为这些场不一定是光滑的.

证明基于以下的事实：与膨胀平面场相差不太远的平面之夹角在 Аносов 微分同胚下减小；当 Аносов 微分同胚作用在平面场的泛函空间上时，膨胀平面场会吸引不动点.

为作出放大叶层构造，可把流形分割为充分小区域，在每个区

1) 中译本采用较通用的 Smale 的用语.

2) n 维流形的叶层构造即将它分解为同维数 k 的子流形（称为叶片），而且满足以下条件：流形上每点都有一邻域，其中分解该流形为叶片的连通分枝微分同胚于分割 n 维立方体为平行的 k 维平面族

域中作任意叶层构造，使其叶片与膨胀场中的平面维数相同且交角不太大． 对这个叶层构造反复应用 Аносов 微分同胚．这样，所得的分块的叶层构造序列将收敛于真正的膨胀叶层构造．

注 当一个微分同胚的线性部分固有值的模均不为 1 时，其不动点的收敛(即稳定的)与发散(即不稳定的)不变流形的作法正是这一作法的特例．要作发散(不稳定的)流形，可对切于此微分同胚之线性部分的发散(不稳定)不变子空间的任意子流形反复应用这个微分同胚．

用以上方法不仅可以对所给 Аносов 微分同胚作出其压缩与膨胀叶层构造，而且对接近于它的 Аносов 微分同胚亦然．所以一微分同胚是 Аносов 微分同胚这一性质在微分同胚的(C^1 意义下)的小摄动下不变．此外，由作法可知，压缩与膨胀叶层构造(或准确些说是平面场)连续依赖于微分同胚．

在作出原微分同胚与摄动微分同胚的压缩与膨胀叶层构造后，Аносов 定理的证明就不难了．

事实上，考虑任一相点及其在原微分同胚下的象的序列．考虑象点的 ε-邻域组．ε 选得很小，若摄动后的微分同胚与原微分同胚距离很小，则每一个 ε-邻域都既可用原微分同胚的、又可用摄动后微分同胚的压缩叶层构造的叶片来分层为连通分支．

我们将称这些分支为铅直圆盘．考虑原叶层构造经过该选定相点的铅直圆盘及其在原 Аносов 微分同胚的各次正幂下的象．

对于摄动后的叶层构造，存在唯一的铅直圆盘使其在摄动后的微分同胚的各次正幂下的象仍在上述 ε- 邻域内．

事实上，原 Аносов 微分同胚在水平方向上是膨胀的．所以摄动后的 Аносов 微分同胚在水平方向上也是膨胀的．

用 U_n 记上述邻域，$U_n \to B_n$ 为其按摄动铅直圆盘的分层，A 记摄动后的微分同胚．因为 A 在水平方向上是膨胀的，A^{-1} 诱导出压缩映射 $a_n: B_n \to B_{n-1}$．所求的点 $b_0 \in B_0$ 定义为

$$b_0 = \bigcap_{n \to +\infty} a_1 a_2 \cdots a_n B_n.$$

完全相同，存在唯一摄动后的水平圆盘，它在此微分同胚的各次负幂下的象不越出具有负编号的邻域.

这样作出的摄动后的水平与铅直圆盘之交决定了由共轭同胚对初始相点所指定的点.

不难证明，这种作法确实定义了一个同胚，它将原 Аносов 微分同胚与摄动后的微分同胚共轭连结起来的.

具有由正密度的不变测度的 Аносов 微分同胚有一处处稠密的周期点集（即循环）. Аносов 与 Синай 对具有不变测度的 Аносов 微分同胚的遍历性质、混合性质等进行了相当完备的研究（见 Д. В. Аносов [3]）.

C. Аносов 流

在过渡到微分同胚的单参数群时，双曲性的定义需稍加改变，因为沿着相曲线既没有压缩也没有膨胀.

考虑鞍点 $\dot{x}=-x$, $\dot{y}=y$ 的积分曲线（图 83）. t 轴是两个平面的交线，这两个平面都由这样的积分曲线组成，它们分别在 $t\to+\infty$（在 (x, t) 平面上）与 $t\to-\infty$ 时（在 (y, t) 平面上）趋向 t 轴；而其余积分曲线则当 $t\to+\infty$ 与 $t\to-\infty$ 时都离开 t 轴.

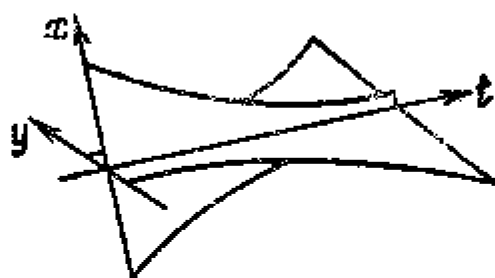


图 83

如果一个微分同胚的单参数群的相曲线在一条已给相曲线附近的性态如上例积分曲线性态一样，就称为 Аносов 流. 正式定义如下：

定义 令 M 为一紧光滑流形，v 是 M 上无奇点的向量场，$\{g^t\}$ 是相应的相流。设

(1) M 在每一点上的切空间都可表为三个子空间的直和：

$$T_xM = X_x \oplus Y_x \oplus Z_x;$$

(2) 平面场 X, Y, Z 连续而且在相流下不变；

(3) 场 Z 由相速度场生成；

(4) 对某些正常数 c, λ 以及 M 上的某个 Riemann 度量有

$$\|g_*^t|_X\| \leqslant ce^{-\lambda t}, t > 0; \|g_*^t|_Y\| \leqslant ce^{\lambda t}, t < 0.$$

这时相流就称为 Аносов **流**，方程 $\dot{x} = v(x)$ 称为 Аносов **系统**。

例 M 作法如下：求环面与区间 [0,1] 的直积，并且边界环面用 Аносов 自同构粘合：即将 $(x,1)$ 与 $(Ax,0)$，$x \in T^2$，粘合，而这里

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

考虑直积 $T^2 \times [0,1]$ 中沿因子[0,1]的向量场。在把直积粘合成 M 后，这个场变成 M 上的光滑向量场 v（为什么?）。

这样得到的场 v 在 M 上定义一个 Аносов 流。

定理 所有 Аносов 流都是结构稳定的。

◀ 证明与对于 Аносов 微分同胚方法相同(见上引文献)。▶

有些 Аносов 流具有无穷多个闭相曲线的无穷集合。所以，即令限于结构稳定的向量场，也不能希望在高维情况下得到如二维球面那样简单的图象，也就是说，只有有限多个平衡位置和环线的简单图象。

S. Smale 在 1961 年最早作出了具有无限多个环线的结构稳定系统的例子。在这些例子中，指数型发散不是发生在整个相空间上，而是发生在一个闭子集上。这种集现时称为双曲集。双曲集的一般理论是后来在 Аносов 系统理论的影响下建立的。

这种例子的出现使得在高维系统相曲线性态的理解上出现了急剧的变化。有些专家匆匆忙忙地宣布这些结果没有任何现实的意义，因为尽管它们是结构稳定的，由于个别轨道的不稳定性，却“不能描述任何现实的物理过程”。

然而有一些很重要的实际情况，其中正是轨道具有指数发散性的系统最好不过地描述了现实。我们这里讲的是湍流类型的现象以及碰撞粒子(例如在把气体看作刚性小球的模型中)运动的数学描述.沿负曲率流形测地线运动的问题要简单一些,但也相当实际。我们就来分析这个问题的最简单的一例——常负曲率曲面的测地线问题。为此需要知道一些有关 Лобачевский 几何的知识.

D. Лобачевский 平面

Лобачевский 平面就是赋予以下度量[1]的上半平面 $\operatorname{Im} z>0$:[1]

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2},\text{ 这里 } z=x+iy.$$

直线 $y=0$ 称为绝对。注意在此度量下的角与 Euclid 度量的角相等,而一点到绝对的距离为无穷大

定理 Лобачевский 平面上的测地线是而且仅是垂直于绝对的圆和直线(图 84)。

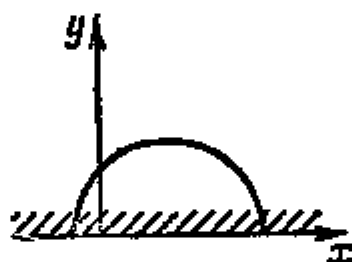


图 84

◀上述度量在以下变换下不变：(1) 沿绝对的平移；(2) 以坐标原点为心的相似变换；(3) 对称变换 $z\longmapsto-\bar{z}$ (这是明显的)；(4) 反演 $z\longmapsto\frac{1}{\bar{z}}$.

由 (1) -(4) 可知这度量在所有变上半平面为自身的分式线性变换下不变．此外，由(3)可知 y 轴是测地线。但是 y 轴可以

---

1) 或与它等度量的任意 Riemann 流形.

用实的分式线性变换变为垂直于绝对的任意圆或直线，所以它们都是测地线。

反之，过任一点沿任意方向都可以作出垂直于绝对的圆或直线。所以再没有其它测地线。▶

注 以上同时也证明了，Лобачевский 的（保持度量与定向的）运动就是上半平面到自身的分式线性变换。

定理 Лобачевский 平面上的圆是而且仅是所有的不与绝对相交的 Euclid 圆。

◀考虑单位圆。可以用分式线性变换把上半平面变为单位圆（见第一章 § 5，E）所以单位圆内域也可以看作 Лобачевский 平面的模型（图 32）。

这时，保持上半平面不变的分式线性变换变为保持单位圆不变的分式线性变换。所以 Лобачевский 平面的圆模型的度量在所有保持单位圆不变的分式线性变换下不变。

但是这些变换也包含了绕中心的旋转。所以与单位圆同心的 Euclid 圆上的任意点到圆心的距离在 Лобачевский 度量意义下都相等。所以 Euclid 圆只要圆心是单位圆的圆心就都是 Лобачевский 圆。

但是任意不与绝对相交的 Euclid 圆都可以用 Лобачевский 平面的运动变为圆心在坐标原点的 Euclid 圆。所以所有不与绝对相交的 Euclid 圆都是在 Лобачевский 度量意义下的圆（在圆模型中与在半平面模型中均可）。由此可知，所有的 Лобачевский 圆反过来也都是 Euclid 圆。▶

定义 在 Лобачевский 平面上相切于一定点而半径增加的一串圆的极限称为极圆。

定理 Лобачевский 平面的极圆即切于绝对的圆和直线。

◀ 考虑由 Лобачевский 平面上一点发出的半条测地线（图 85）。在这半条测地线上，取距起始点为 r 的一点。以此点为心，r 为半径的圆必过起始点而且垂直于这半条测地线。现在令 r 趋向无穷。于是在 Euclid 意义下，这个圆必收敛于垂直于这半条

测地线而且经过测地线与绝对的交点的圆. 这个 Euclid 圆切于绝对. ▶

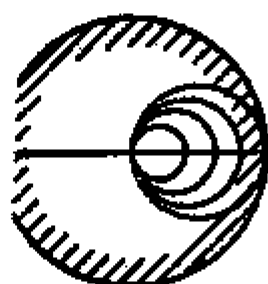


图 85

注 1 用这样的令 $t\to\infty$ 取极限的方法也可以作出负曲率曲面上的极圆与负曲率流形上的极球.

注 2 经过 Лобачевский 平面上每一点必有两个有公切线的极圆. 它们可用前法令 $t\to+\infty$ 与 $t\to-\infty$ 而得.

E. 负曲率曲面上的测地流

设 M 为 Riemann 流形. 我们将设 M 作为度量空间是完备的. 例如, 任何紧流形都是完备的; Лобачевский 平面也是完备的,因为它到绝对的距离是无穷.

考虑流形 M 的长为 1 的切向量集合. 若 M 之维数为 n, 此集的维数为 $2n-1$. 我们记它为 T_1M.

定义 M 上的测地流即该流形的长为 1 的切向量所成的流形上的微分同胚的一种单参数群,其作法如下;将每个向量在时间 t 之内沿切于它的测地线移动距离 t, 但仍切于此测地线.

定理 Лобачевский 平面上的测地球满足 Аносов 流定义中的条件 (1)—(4).

◀1. 先作压缩和膨胀叶层构造. 为此, 对于每一个向量作出垂直于它的极圆,这是一组圆的极限,这些圆的圆心位于向量作用点的前方. 在每一点上都赋予极圆以单位法向量, 于是我们得到连续的法向量场 (图 86).

要注意,不论从这些向量中的哪一个向量开始,都会得到同样

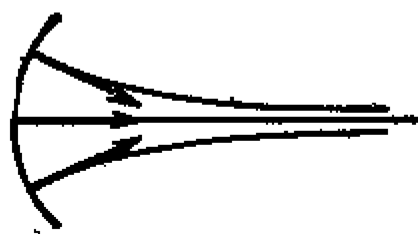


图 86

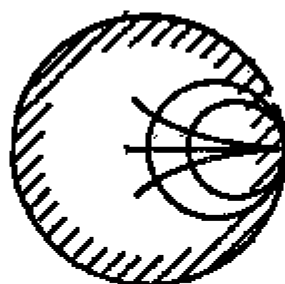


图 87

的极圆和向量场。所以这个极圆和场可以看作是 Лобачевский 平面的单位切向量所成的三维空间 T_1M 中的一条曲线。这样我们作出了 T_1M 的一维叶层结构，即将单位向量空间分解为曲线。这个分解就是压缩叶层结构。

以向量作用点后方的点为心作圆，就可以同样地作出膨胀叶层结构。

2. 条件 (2)，(3) 表示测地线和极圆对于测地流的不变性并可直接验证。事实上，与同一极圆垂直的测地线族与绝对相交于该极圆与绝对相切之点，而与绝对相切于此点的极圆又都垂直于测地线族 (图 87)。

所以测地流把每一个(赋有法线场的)极圆变为与绝对在同一点相切的(也赋有法线场的)极圆。

3. 条件(1)表示，赋有切向量场测地线的切向量以及赋有法线场的两个极圆的切向量是线性无关的。这一点容易验证：唯一重要的事是两个极圆都只是一阶相切而非高阶相切。

4. 我们来证明，压缩极圆弧段在相流作用下是指数压缩。设初始的极圆是上半平面的直线 $y=1$。测地线是直线族 $x=$ const.，测地流在时间 t 内将直线 $y=1$ 变为 $y=e^t$ 所以极圆上的一段被变为长度小于它的 e^t 倍的一段。由此可知相流将压缩叶层结构的叶片(在 T_1M 的自然度量意义下)压缩。

对放大极圆作类似的讨论即可完成 Аносов 系统定义中条件 (4) 的验证。▶

推论 紧常负曲率曲面上的测地流即 Аносов 流。

◀对时间变量作变换可以化到曲率为 −1 的情况。Лобачевский 平面是具有常负曲率 −1 的曲面的万有覆盖曲面；在 Лобачевский 平面上将一个点与它的由某个 Лобачевский 运动的离散群映射所得的点等同起来即得这个常负曲率 −1 曲面（图 88）。

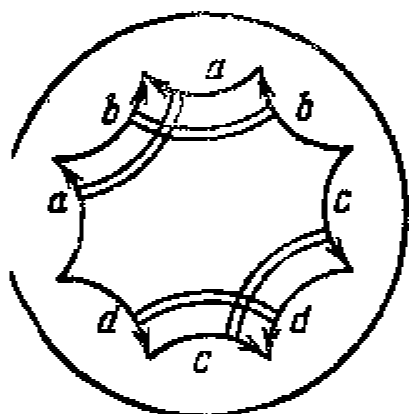


图 88

Лобачевский 平面的测地线，圆和极圆在这种等同之下投射为该曲面的测地线，圆和极圆；Лобачевский 平面的测地流及其压缩和膨胀叶层结构变为该曲面的相应的叶层结构．▶

由此特别地，可知**紧常负曲率曲面上的测地流是结构稳定的，而且有处处稠密的闭测地线集**．

注 对高维的负曲率（不一定常负曲率）流形，测地流也是 Аносов 流．证明和以上最简单的情况类似：只是极圆（极球）存在性的证明稍复杂一些．见上述 Аносов 的著作．

F. 弹子系统

考虑椭球面上的测地流．设它的短轴趋于 0，这样椭球变得扁平，最后成为椭圆．测地流的极限情况成为椭圆所围区域中的所谓弹子系统：一点沿直线在区域内运动而在边界上按"入射角与反射角相等"这个法则反射（图 89）．

弹子轨道在椭圆内恒不可能处处稠密．但由其它曲线（例如非光滑的向内凸的曲线）围成的区域中，弹子运动轨道的指数不稳定

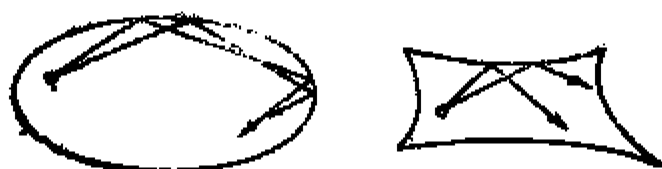


图 89

性与混合性质和 Аносов 系统几乎相同。

特别地，我们考虑在有洞环面上的弹子系统。这个系统可以看成是"椒盐小饼干[1]"上的测地流的极限("椒盐小饼干"蜕化为一个带洞的两侧环面正如同椭球蜕化为两侧的椭圆一样)。此外，带洞的两侧环面若有平面度量，则可看成是具有负曲率的(蜕化时全部曲率都集中在洞的边缘上)椒盐小饼干的极限情况。这样弹子系统有 Аносов 流的性质也就不奇怪了。

有一种希望，即用接近于双曲理论的想法可以证明箱中的刚性球系统的遍历性，而自 Boltzmann 以来，在统计力学中都假设这一点成立(遍历性的意思就是，相空间的每一个不变子集或有测度 0，或为全测度。由此得出，时间平均与空间平均几乎处处相等。在我们的情况下相空间就是等能集)。平面情况的证明由 Я. Г. Синай [2] 给出。关于弹子系统又可见 Л. А. Бунимович [1] [2]。

G. Аносов 系统与追赶法

在计算数学用追赶法解决的问题中也出现双曲情况。举一个例子，如要解决二阶方程 $\ddot{x}=x$ (即方程组 $\dot{x}=p$, $\dot{p}=x$) 在区间 $[0, T]$ 上的边值问题。假设已给非齐次边值条件：初始点 $\varphi(0)$ (坐标为 $(x(0), p(0))$) 给在相平面 (x, p) 的已知直线 l_0 上，终点 $\varphi(T)$ 则给在已知直线 l_T 上。

若初始点 $\varphi(0)$ 已知，则在试图以 $\varphi(0)$ 为初始条件解 Cauchy

1) "椒盐小饼干"(pretzel)是一个二维流形，其上有若干小洞，以其形似一种食品，故得此名。——译者注

问题，将遇见精确度的损失，这损失将随积分区间的长度 T 以指数增长。事实上，具有正比于扩张向量 (1, 1) 的初值的解将指数地增长。因此在由平面 $t=0$ 过渡到平面 $t=T$ 时，将在向量 (1, 1) 方向上膨胀(以后这个向量称为水平向量)，而在向量 (1, −1) (称为铅直向量，见图 90) 方向上压缩。

现在考虑直线 l_0 在我们的变换作用下的象。尽管直线上每一点的象的精确度有以指数增大的损失，整个直线的象一般说来可以非常精确地决定。

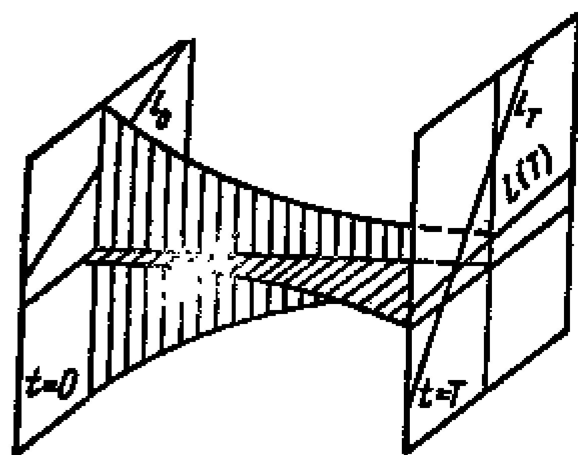


图 90

事实上，这个象的方向一般说来接近于水平方向。

所以计算这个几乎水平直线上的点时所产生的误差只能稍许影响直线的位置：只有误差的水平分量会很大；铅直分量则很小。

我们设直线 l_T 与 l_0 的象的交点为 $\varphi(T)$。现在为了最后确定解需要求解一个后向 Cauchy 问题。这时沿水平方向的误差不会增长，而 $\varphi(T)$ 的铅直分量又可以由 $\varphi(T)$ 位于直线 $l(T)=g^T l_0$ 上而定。所以首先由 0 到 T 以决定直线 $l(T)$，然后再由 T 回到 0，这样在每个直线上各定一点——这一步都不会有精确度的指数损失。

H. 谈谈 Аносов 系统的应用

Аносов 系统和一些相关问题现在所处的境地，就好像极限环

在 Poincaré 时代的情况一样。那时，研究极限环所需的数学工具都已创造出来了，但是极限环在工程上正式地应用只在几十年后才开始，那时无线电技术的进步把非线性振动理论变成应用数学的一个领域。

从六十年代起，就猜想到 Аносов 流的一个自然的应用领域是流体的湍流理论。设想一个闭的充满不可压缩粘性流体的容器，由于某种外力的作用(例如摇动)而运动。这种摇动是必需的，否则粘性将使运动随时间而衰减。

流体力学的 Navier-Stokes 方程给出一泛函空间(这个无限维相空间中的点即无散度向量场，即该流体的速度场)中的动力系统[1]。

这个动力系统的平衡位置就是定常速度场，也就是流体在空间各点的速度不随时间变化的运动。这个系统的封闭环线即流体的周期运动，这时空间各点处的速度周期地变化。在扭开水龙头时有时可以观察到这种运动。

关于湍流的数学描述有以下的假设：这个现象终究可以化为一个有限维动力系统，因为粘性很快地除去了高频成分。换句话说，在无限维相空间中假设存在一个有限维流形或集合，而所有相曲线都被吸引到它上面，在这个集上，相流是一个 Аносов 系统，或者具有轨道的指数不稳定性以及混合性这些类似性质。

在这个情况下流体运动的可观察的性质如下：不论如何取初值，运动很快地趋向极限状况；然而这个状况既非定常的又非周期的；虽然极限运动是由有限个参数(即极限状况的"相")决定的，这些参数本身却是高度不稳定的(具有相近初相的极限流指数发散)；然而，流的统计性质并不依赖于这些不稳定的相。

在这个方向上已得到的结果如下。若粘性充分大，则 Navier-Stokes 系统有唯一的不动点吸引一切相曲线。这个不动点就是

1) 老实说，现在的偏微分方程理论还不能解决三维 Navier-Stokes 方程解的存在和唯一性问题，但是我们暂时不管这一点。

所谓的层流。所有其它的流在粘性的作用下都会变为层流。粘性减小时，层流可能失稳，这时会出现一个稳定的极限环（见第六章）。粘性继续变小时，极限环也可能失稳而产生更复杂的能吸引邻近运动的非周期运动。人们猜想，这个运动一般地会具有相曲线在吸引集上的指数不稳定性。虽然近年来关于这个问题，数学家已作了大量的理论和实验研究（见 J. B. McLaughlin, P. C. Martin 的总结文章 [1]），这个猜想还远未能成为定理。

然而应该注意，具有指数不稳定轨道的吸引集的出现并不一定是由于层流的失稳；这个集可能在远离平衡位置处出现，甚至当粘性值仍使层流稳定时也会出现。

§15. 结构稳定系统并非处处稠密

在本节中，我们将 C^1 类光滑动力系统的函数空间中作出一个区域，其中没有结构稳定系统。

A. Smale 的例子

S. Smale 在 1965 年作出了三维环面的一个微分同胚，在它的邻域中没有结构稳定的微分同胚。

因此在四维流形上有这样的向量场，它不能经过小摄动化为结构稳定的。

后来在三维流形上，也有人作出了具有这个性质的场（见 S. Newhouse [1]）。

我们将在本节中叙述 Smale 的作法。

B. 例子的描述

我们在 T^3 上引入坐标 $(x, y, z \bmod 2\pi)$，并且在环面 T^2: $z=0$ 附近以及 z 轴上某区间的附近作出所需的微分同胚 $A: T^3 \to T^3$（微分同胚 A 在三维空间其余区域上的形状对我们无关紧要）。

在环面 T^2 的邻域中，映射 A 由下式给出：

$$A(x,\ y,\ z) = (2x + y,\ x + y;\ z/2).$$

在坐标为 $(0,\ 0,\ \pi)$ 的点 O 的附近，映射 A 由下式给出：

$$A(x,\ y,\ \pi + u) = (x/2,\ y/2,\ \pi + 2u).$$

于是点 O 是个鞍点，而发散的不变子流形是包含 z 轴上区间 $(\pi,\ \pi - \varepsilon)$ 的曲线 γ。

曲线 γ 在 A 下不变而且在 A 的作用下膨胀。所以反复施以 A 将可从上述区间得到半个不变流形，它或者止于 A 的不动点，或者具有无限长。

我们要求上面的曲线进入上述邻域 A，并在其中有无限长度。容易看到，具有这种性质环面的微分同胚是存在的。

C. 微分同胚 A 的稳定性质

1. A 在 T^2 的一个充分小邻域中的限制是结构稳定的。

◀事实上，这可以用证明 Grobman-Hartman 定理的同样方法来证明。我们将微分同胚 $A: T^3 \to T^3$ 代以另一个映射 A': $T^2 \times \mathrm{R} \to T^2 \times \mathrm{R}$ 中，它处处都以在 U 中定义 A 的同样公式来定义。接近于 A 的微分同胚 $\tilde{A}$ 则代以映射 $\tilde{A}'$: $T^2 \times \mathrm{R} \to T^2 \times \mathrm{R}$ 中，它与 $\tilde{A}$ 在环面 $T^2 \times O$ 附近相同，而且差 $\tilde{A}' - A'$ 有紧支集，它在 C^1 意义下很小。现在我们可以应用 Аносов 定理（准确些说是用它的证明）；我们得到 $\tilde{A}'$ 与 A' 的拓扑等价性，从而也知 $\tilde{A}$ 与 A 在环面 T^2 附近也是如此。▶

2. 由所证得知，微分同胚 $\tilde{A}$ 有接近于环面 T^2 的不变流形 $\tilde{T}^2$，而且在其上周期点成一个可数的处处稠密集合。经过 $\tilde{T}^2$ 的每一点都有微分同胚 $\tilde{A}$ 的二维压缩叶层结构的唯一定义的光滑叶片，且它连续依赖于此点（它由在此微分同胚逐次作用下彼此靠近的点构成）。

3. 映射 $\tilde{A}$ 有一不动点 $\tilde{O}$ 接近于 A 的不动点 O。

◀由隐函数定理即可得知，因为 O 是非蜕化的，而 $\tilde{A}$ 又接近于 A。▶

$\tilde{A}$ 在 $\tilde{O}$ 点的线性化的固有值接近于 A 在 O 点的固有值.

由 Grobman-Hartman 定理可知，$\tilde{O}$ 和 O 点一样都是鞍点而且有一维的发散不变流形 $\tilde{\gamma}$，容易看到 $\tilde{\gamma}$ 接近于 γ. 特别是 $\tilde{\gamma}$ 会进入 $\tilde{T}^2$ 的邻域 $\tilde{U}$.

4. 在远离 U 处，可以对 A 作任意小的摄动使曲线 γ 变得"有一个鼻子"：局部看来，它位于 A 压缩叶层结构的、含 γ 之一点的叶片的一侧，而且 γ 与此叶片的相切是一阶的. 我们记这样得到的映射为 A_1.

D. 结构不稳定性

我们来证明，**微分同胚 A_1 和所有接近于它的微分同胚都是结构不稳定的.**

◀把映射 A_1 放进微分同胚的单参数族 A_s 中，它们只是"鼻子"在 A_1 的原象附近略有不同. 映射 A_s 中每一个接近于 A_1 的元素都具有 A_1 的上述性质，即：一个不变环面，二维压缩叶层结构，一个具有发散的不变流形的鞍点，以及在此流形上的"鼻子". 我们假设当 s 变化时，鼻子穿过压缩叶层结构的叶片.

现在考虑包含鼻子的压缩叶片. 这个叶片可能包含也可能不包含环面上的一个周期点. 因为周期点在环面上是处处稠密的，所以对 A_1 在族中作任意小的摄动，就既能把"鼻子"放在含有周期点的叶片上，也能把它放在不含周期点的叶片上.

但是叶片上包含或不包含周期点这一性质是拓扑不变的，所以 A 的拓扑型当此映射作任意小的变动时都会改变. 因此映射 A_1 是结构不稳定的.

现在设 $\tilde{A}_1$ 是任意的充分接近 A_1 的微分同胚. 这时，按 §15 C 中所说的，以上对 A_1 所作的讨论也都可以对 $\tilde{A}_1$ 采作. 所以 $\tilde{A}_1$ 也是结构不稳定的. ▶

第四章　摄动理论

绝大多数微分方程既得不出精确的解析解，也得不出很多完备的定性描述。摄动理论就是一系列十分有用的方法，它研究接近于某一特定类型方程的方程。这些特定类型的方程称为未摄动的，它们的解假设是完全已知的。摄动理论研究微分方程的微小改变对解的性态的影响。

如果摄动的大小可用一个小参数 ε 来刻划，则摄动在与 1 同数量级的一段时间内的效应将使解发生数量级为 ε 的变化。求解一个沿着未摄动解的变分方程就可以近似算出这个变化。然而如果我们关心解在一个很大的时间区间（例如长为 $1/\varepsilon$ 数量级的区间)上的性态，就会产生复杂得多的问题。这就是所谓摄动理论的渐近方法的主题。这些方法中最重要的是平均法，本章就要来讨论它。

早自 Lagrange 和 Laplace 的时代，平均法就被用在天体力学中以决定行星轨道在相互摄动下的演化。Gauss 是这样来表述它的：为了决定这种演化，应该把每个行星的质量按它在行星轨道每部分上的停留时间成正比地分散在轨道上，而把行星的吸引用这样形成的环的吸引来代替。

然而平均法的论证是一个迄今还远未彻底解决的问题。

§16　平　均　法

在本节中，我们将要描述平均法的最简单变体的方案。这个方法的论证问题将在以下各小节中讨论。

A. 未摄动与摄动系统

考虑光滑的纤维丛 $\pi: M \to B$。一个向量场 v 若处处切于纤

维，就称为铅直的(图 91). 在应用上，我们常取环面为纤维.

纤维 π 的底 B 上的函数决定了 M 上方程 $\dot{x}=v(x)$ 的初积分. 铅直向量场 v 称为未摄动的. 接近于 v 的场 $v+\varepsilon v_1$ 称为摄动的. 考虑摄动的微分方程

$$\dot{x}=v(x)+\varepsilon v_1(x).$$

未摄动方程的每一条相曲线都被 π 投影到底空间的一点上. 沿摄动方程相曲线的运动被投影为底空间上缓慢的运动，其速度是 ε 数量级. 在底空间上经过 $1/\varepsilon$ 数量级的时间才发生明显可见的位移. 平均法的目的就是用底空间上的向量场来描述这个缓慢的运动. 在平均法中，这个缓慢的运动描写成小振动和系统的演化的组合，也就是漂移(图 92).

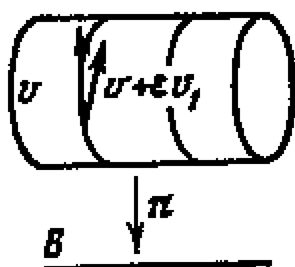


图 91

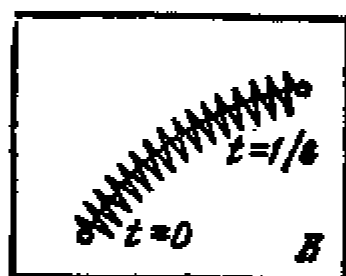


图 92

例子

考虑行星系. 未摄动方程就是只考虑太阳和行星的相互作用. 在未摄动运动中，行星沿 Kepler 轨道运动. 行星之间的相互吸引力起摄动的作用. 行星与太阳的质量比起 ε 的作用，它是一个 1/1000 数量级的量. 绕太阳旋转的周期，即一年或十年数量级的量，是特征时间单位，行星轨道半径是特征长度单位.

在这个例子中，M 是相空间，底空间 B 即 Kepler 椭圆组所成的空间，纤维是环面，其维数即行星的个数(每一个 Kepler 椭圆组决定一个环面，其上的点用以表示行星在椭圆上的位置). 底空间 B 上数量级为 1 的位移相应于轨道的改变，例如半径加倍. $1/\varepsilon$ 数量级的时间就是几千年或几万年数量级的时间.

于是，在这个例子里，底空间上速度为 ε 的缓慢运动(漂移)可

以在数千年数量级的时间里使地球轨道的半径加倍。这对我们的文明是致命的，文明之所以存在正是因为这种漂移没有发生(至少是没有使轨道半径改变，离心率的变化确实是有的，而且显然对冰期有影响)。

B. 平均化的程序

为了描述平均法，我们引进一些记号。设纤维丛的纤维是 n 维环面。在底空间每一点的邻域中，纤维化就是直积。我们限于在这样一个邻域中，并将纤维空间 M 的每一点表为 (φ, I)，I 是底空间的一点，φ 是 n 维环面 F 的一点。

选用 I 这样的记号是因为 I 的坐标 $(I_1, \cdots, I_k)$ 在 M 上定义了未摄动系统的初积分。环面 F 的点 φ 由一组 n 个角坐标 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \bmod 2\pi$ 给出。(在应用中，坐标 φ_k 时常是由问题的实质唯一决定的，但容许在每个环面上任意选择原点，而且可以相差一个整数元么模线性变换。我们固定一个坐标系 (φ, I))。

定义 平均法的未摄动方程即方程

$$\begin{cases}\dot{\varphi} = \omega(I), \\ \dot{I} = 0,\end{cases}$$

其中 ω 是由依赖于底空间的点 I 的频率向量 $(\omega_1(I), \cdots, \omega_n(I))$ 所给出的铅直向量场。

定义 平均法的摄动方程即方程

$$\begin{cases}\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{I} = \qquad\qquad \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon),\end{cases}$$

f 和 g 对 φ 以 2π 为周期，$\varepsilon \ll 1$ 是小参数。角坐标 φ_i 称为快变量，底空间的坐标 I_j 称为慢变量。

定义 平均方程即方程

$$\dot{J} = \varepsilon G(J),$$

这里 $G(J) = \oint g(J, \varphi, 0)d\varphi / \oint d\varphi$ 是函数 g 在纤维上的平均值。

平均方程的解称为平均运动.

例 考虑摄动方程

$$\dot{\varphi}=\omega,\quad \dot{I}=\varepsilon(a+b\cos\varphi).$$

平均方程是

$$\dot{J}=\varepsilon a.$$

所以,在转向平均方程时,我们在 I 的方程的右方舍去了一个与余下的量同一数量级的量. 在数量级 1 的时间里,不论舍去的或者余下的量效果都是一样的(ε 数量级). 然而在数量级为 $1/\varepsilon$ 的时间里,它们的效果全异;留下的项导致系统漂移,而略去的项只产生很小的振颤.

◀摄动方程的解给出(例如取 $\varphi_0=0$)

$$I(t)=I_0+\varepsilon at+\frac{\varepsilon b\sin\omega t}{\omega},$$

它与平均方程的解 $J(t)=I_0+\varepsilon at$ 只相差一个振荡的小项(图 93). ▶



图 93

C. 空间平均与时间平均

考虑一个比 1 很大,比 $1/\varepsilon$ 又很小的时间区间 T. 在时间 T 里,摄动运动的轨道偏离初始纤维并不明显.

我们来计算摄动轨道在底空间上的投影在时间 T 内的位移这个位移大约是 $\varepsilon T\ll 1$ 数量级的. 位移的速度等于 $\varepsilon g(I,\varphi,\varepsilon)$. 作为一次近似, I 可以假设为常数, ε 等于零, φ 依未摄动方程变化. 这时,在时间 T 内的位移有近似的表达式:

$$\Delta I=\varepsilon T\left[\frac{1}{T}\int_0^T g(I,\varphi(t),0)dt\right]+o(\varepsilon T).$$

时间 $T \gg 1$ 很大；所以方括号中的表达式接近于 g 的时间平均。

引入慢时间 $\tau = \varepsilon t$. τ 由 0 变到 1 相当于 t 从 0 变到 $1/\varepsilon$. 我们用一撇表示运动对于慢时间的速度。这时前面的方程成为

$$\frac{\Delta I}{\Delta \tau} \approx g \text{ 的时间平均},$$

$$I' = g \text{ 的时间平均}.$$

把时间平均换为空间平均，就得到平均方程：

$$J' = G(J), \quad G = g \text{ 的空间平均}.$$

所以，化到平均方程就相当于把沿着未摄动运动的时间平均代以空间平均。

D. 讨论

平均法的应用是把摄动方程代以简单得多的平均方程。在 $1/\varepsilon$ 数量级的时间区间(即慢时间的数量级 1 的区间)里研究平均方程的解。然后推导出摄动运动在 $1/\varepsilon$ 数量级的时间中的性态，(通常是得到这样的结论：摄动方程解的 I 分量在 $1/\varepsilon$ 时间里接近平均方程的解)。

这个结论并不是由前面的讨论直接得出的，而需要证明。事实上，在导出平均方程时，我们用空间平均代替了时间平均。如果未摄动运动的轨道均匀地分布在 n 维环面上，即如果各频率是不可通约的，这样的代替是合理的。在发生共振时，未摄动运动的轨道在一个低于 n 维的环面上处处稠密。所以在接近于共振时，在一个 n 维环面上用空间平均代替时间平均是不对的。

事实上，有这样的例子，表明在 $1/\varepsilon$ 时间里摄动轨道在底空间上的投影和平均方程的解之差可以是与 1 同数量级的：平均漂移和真正的运动指向不同的方向。

在实践中唯一得到完全研究的情况是单频率系统，这时纤维是一维环面，即圆周。

§ 17. 单频率系统的平均化

我们现在提出并证明一个定理，它论证了单频率系统的平均法是正确的。

A. 定理的陈述

考虑相空间 M，它是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^k$ 中的区域 B 和圆周 S 的直积。圆周上的角坐标用 $\varphi \bmod 2\pi$ 来记、B 中的点用 I 来记。

摄动方程为

$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon),$$
$$\dot{I} = \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon).$$

f 和 g 对 φ 以 2π 为周期，平均方程为

$$\dot{J} = \varepsilon G(J), \quad G(J) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(J, \varphi, 0)d\varphi.$$

考虑 B 中的初始点 I_0 并设平均方程具有初始条件 $J(0) = I_0$ 的解在时间 $t = T/\varepsilon$ 内仍在 B 中(即在慢时间 $\tau = T$ 内方程

$$\frac{dJ}{d\tau} = G(J)$$

以 I_0 为初始条件的解不离开 B)。

定理 设频率 ω 在区域 B 中不为零。作平均方程的解 $J(t)$ 与摄动方程解的 I 分量 $I(t)$，而且 $I(0) = J(0)$，则当 $t \in [0, T/\varepsilon]$ 而 ε 为充分小时、$I(t)$ 与 $J(t)$ 之差也很小：

$$|I(t) - J(t)| \leqslant C\varepsilon,$$

这里，常数 C 与 ε 无关。

B. 主要作法

定理证法的主要思想是通过适当的变量变换以消除摄动。这个思想有很多应用(例如见上一章和下一章)，而且是摄动理论整个形式工具的基础。

我们选取新坐标 $P = I + \varepsilon h(I, \varphi)$ 代替 I，使得解的 P 分

量不再是振荡的。为此我们要在P的方程右方消去依赖于φ的ε阶的项。

换言之，我们要作出流形M的微分同胚：$(I, \varphi) \longmapsto (P, \varphi)$，使得摄动场变成这样一个场，它在每一个纤维上到底空间都有几乎是常值的投影(即有数量级为ε^2的误差)。

将 $P = I + \varepsilon h(I, \varphi)$ 对时间求导，并合并ε的一次项，我们得到

$$\dot{P} = \varepsilon \left[g + \omega \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right] + r,$$

这里g中的变元ε要代以0；余项r是对ε的二阶项(下面将要验证这点)。

我们要选取h，使ε的一次项消去，即使上面的方括号消去，从形式上我们将得到

$$h(I, \varphi) = -\frac{1}{\omega(I)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} g(I, \phi, 0) d\phi.$$

这里用到了定理中$\omega \neq 0$的条件。实际上，这样求解方程

$$g + \omega \frac{\partial h}{\partial \varphi} = 0$$

的方法是不合法的，因为h必须对φ具有周期2π才能使映射$(I, \varphi) \longmapsto (P, \varphi)$ 定义在M上。

只有当g在圆周上的平均值为0时，上述公式才在圆周上(而不是在它的一个覆盖直线上)定义函数h。

所以，这样选出的h并不能消除全部摄动g，而只是消除它的振荡部分

$$\tilde{g}(I, \varphi, 0) = g(I, \varphi, 0) - G(I).$$

$\tilde{g}$在一个周期上的平均值为0，于是我们可以用下式定义一个周期函数h：

$$h(I, \varphi) = -\frac{1}{\omega(I)} \int_0^{\varphi} \tilde{g}(I, \phi, 0) d\phi. \quad (1)$$

现在对于P，我们将得到方程

$$\dot{P} = \varepsilon G(P) + \varepsilon R.$$

它与平均方程

$$\dot{J} = \varepsilon G(J)$$

相差一个 ε^2 数量级的小量 εR。所以它们的解将以 ε^2 数量级的速度发散开。因此在时间 $1/\varepsilon$ 内它们将散开一个 ε 数量级的距离。P 与 I 的差也是 ε 数量级的。所以在 $1/\varepsilon$ 数量级的时间周期内，$I(t)$ 与 $J(t)$ 的距离仍是 ε 数量级的。

为了证明这个论断，还需要对上面舍去的项作一些（简单的）估计。

C. 估计

1. 记号 令 $K \subset B$ 是包含 I_0 的紧凸集。我们设 $J(t)$ 在时间 T/ε 内不越出 K 的边界，并以 $|*|_0$ 和 $|*|_1$ 记空间 C^0 和 C^1 的范数（即函数的模的最大值以及函数本身及其一阶导数模的最大值）。令 c_1 为一常数，使得对于 K 中的 I 有

$$|f|_1 \leqslant c_1, \quad |g|_1 \leqslant c_1, \quad |\omega^{-1}|_1 \leqslant c_1.$$

2. 我们来证明**对于充分小的 ε，映射 A**：$(I, \varphi) \longmapsto (P, \varphi)$ **是 $K \times S^1$ 的微分同胚。**

◀由 h 的定义 (1)，$h \in C^1$。因此对充分小的 ε，$|\varepsilon h|_1 < 1$。若有两点被 A 映为一点，则在这两点处 εh 值之差将等于 I 的值之差；因为 K 为凸的，这与不等式 $|\varepsilon h|_1 < 1$ 矛盾。由 $|\varepsilon h|_1 < 1$ 还可得出 A 是局部微分同胚。所以 A 是微分同胚。▶

3. **R 的估计**。我们有

$$R(P(I, \varphi, \varepsilon), \varphi, \varepsilon) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5,$$

$$R_1 = g(I, \varphi, 0) - g(P(I, \varphi, \varepsilon), \varphi, 0),$$

$$R_2 = g(I, \varphi, \varepsilon) - g(I, \varphi, 0),$$

$$R_3 = h(I, \varphi) - h(P(I, \varphi, \varepsilon), \varphi),$$

$$R_4 = \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon) \frac{\partial h}{\partial I},$$

$$R_5 = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon) \frac{\partial h}{\partial \varphi}.$$

设 I 和 $P(I, \varphi, \varepsilon)$ 都属于 K. 因为

$$P = I + \varepsilon h(I, \varphi),$$

我们有

$$|R_1| \leqslant \varepsilon |g|_1 |h|_0, \quad |R_2| \leqslant \varepsilon |g|_1, \quad |R_3| \leqslant \varepsilon |h|_1 |h|_0,$$
$$|R_4| \leqslant \varepsilon |h|_1 |g|_0, \quad |R_5| \leqslant \varepsilon |h|_1 |f|_0.$$

这里出现的 f, g 和 h 的模可以用 c_1 估计。 最终有：如果 I 和 $P(I, \varphi, \varepsilon)$ 属于 K, 则

$$|R(P(I, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)| \leqslant c_2\varepsilon,$$

这里 $c_2(c_1) > 0$ 是与 I, φ 和 ε 无关的常数。

4. $P(t) - J(t)$ 的估计.

用一撇表示对慢时间 $\tau = \varepsilon t$ 的导数，我们得到 P 和 J 满足关系式

$$P' = G(P) + \varepsilon R(P, \varphi(t), \varepsilon),$$
$$J' = G(J).$$

因此 $P - J = Z$ 满足不等式

$$|Z'| \leqslant a|Z| + b,$$

这里 $a = |G|_1$, $b = c_2\varepsilon$, 当 P, I 和 J 位于 K 中时，此式总是成立的。

5. § 18 **A** 中定理证明的结束.

◀用 c_3 记量 $|h|_0$. 于是我们有

$$|P(I, \varphi, \varepsilon) - I| \leqslant c_3\varepsilon.$$

同时，以上证明的估计给出，当 $\varepsilon t \leqslant T$ 时，有

$$|P(t) - J(t)| \leqslant c_4\varepsilon, \quad c_4 = (c_3 + c_2 T)e^{aT},$$

只要 $I(t)$, $P(t) = P(I(t), \varphi(t), \varepsilon)$ 和 $J(t)$ 位于 K 中。

用 ρ 表示平均运动的轨道 $\{J(t), \varepsilon t \leqslant T\}$ 到 K 的边界的距离. 如果 $(c_4 + c_3)\varepsilon < \rho$, 则按前述的估计，当 $\varepsilon t \leqslant T$ 时, $I(t)$, $P(t)$ 和 $J(t)$ 不可能越出 K 的边界. 但这时在整个时间区间中有

$$|I(t) - J(t)| \leqslant |I(t) - P(t)| + |P(t) - J(t)| \leqslant c_3\varepsilon + c_4\varepsilon. \ ▶$$

D. 例子

van der Pol 方程就是

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}.$$

这是一种摆的方程，其中有非线性的“摩擦”，这摩擦当振幅大时为正，振幅小时为负。

未摄动方程 $\ddot{x} = -x$ 可以写为标准形式 $\dot{\varphi} = -1$, $\dot{I} = 0$，这里 $\varphi = \arg(x + i\dot{x})$, $2I = x^2 + \dot{x}^2$.

摄动方程中 I 的方程是

$$\dot{I} = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}^2 = 2\varepsilon I(1 - 2I\cos^2\varphi)\sin^2\varphi.$$

因此平均方程是

$$\dot{J} = \varepsilon(J - J^2/2).$$

这个运动有排斥平衡位置 $J = 0$ 和吸引平衡位置 $J = 2$.

J 的方程的平衡位置对应于摄动方程组的环线。上面证明的定理使得能够断定：在 $1/\varepsilon$ 数量级的时间里，摄动方程组中 I 的变化接近于平均方程组中 J 的变化。但若平均方程组有非蜕化的平衡位置(例如一级近似为稳定的平衡位置)，则对充分小的 ε，摄动方程组将有非蜕化的(例如一级近似为稳定的)环线；这一点容易由隐函数定理得出。

特别地，对于小的 ε，van der Pol 方程有接近于圆 $x^2 + \dot{x}^2 = 4$ 的稳定的极限环(图 94)。

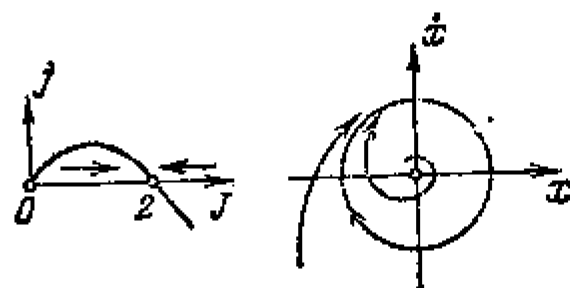


图 94

§18. 多频率系统的平均化

多频率情况比单频率情况研究得少得多．在本节中，我们要给出这个领域基本结果的一个综述．

A. 共振曲面

考虑平均法中通常的摄动方程组

$$\begin{cases}\dot{\varphi}=\omega(I)+\varepsilon f(I,\varphi,\varepsilon), & \varphi\in T^n,\ \varepsilon\ll 1,\ \omega\neq 0,\\ \dot{I}= \varepsilon g(I,\varphi,\varepsilon), & I\in B\subset \mathbf{R}^k.\end{cases}$$

频率向量 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ 称为共振的，如果存在整数成分非零向量 $m=(m_1,\cdots,m_n)$，使得 $(m,\omega)=0$．

这个整数向量称为共振数．

如果底空间 B 中的点 I，使得 $\omega(I)$ 为共振的，我们就称它为共振点．相应于具有共振数 m 的同一共振的所有共振点 I，组成纤维丛的底空间 B 中的超曲面

$$\Gamma_m=\{I\in B:(m,\omega(I))=0\}.$$

这个超曲面称为共振超曲面．

在一般情况下，共振点与非共振点都在 B 中处处稠密(若频率个数 $n>1$)．

例1 考虑未摄动双频率系统

$$\dot{\varphi}_1=I_1,\ \dot{\varphi}_2=I_2,\ \dot{I}=0.$$

这里 B 是坐标为 I_1,I_2 的平面(除去零点，因为我们已设 $\omega\neq 0$)；共振曲面就是所有经过 0，而且具有有理斜率的直线．

在这个例子中，在一般的双频率系统中也一样，共振曲面一般地构成不相交超曲面族（图 95，所谓“一般地”即指 $\dfrac{\partial\omega}{\partial I}$ 有最大秩）．当点 I 在底空间上运动时，它一般地会横截共振曲面．

如果频率的个数是三个或更多，共振曲面的分布会完全不同．



图 95

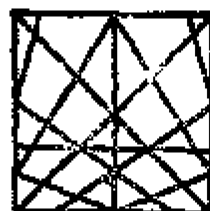


图 96

例2 考虑未扰动的三频率系统

$$\dot{\varphi}_1 = I_1,\ \dot{\varphi}_2 = I_2,\ \dot{\varphi}_3 = 1,\ \dot{I} = 0.$$

这里 B 是坐标为 I_1, I_2 的平面；共振曲面是所有具有有理方程的直线。

这时，当点 I 在平面上运动时，若此点横截于所有的共振曲线，则它将与其中许多以小的角度相交，因为对任意直线元素都有共振曲线的直线元素任意接近于它(图96)。

注 如果考虑底空间到 $(n-1)$ 维射影空间的映射

$$\Omega:\ B \to \mathbb{R}P^{n-1},\quad \Omega(I) = (\omega_1(I), \cdots, \omega_n(I)).$$

以上所述会更加明瞭。共振曲面就是 $\mathbb{R}P^{n-1}$ 中有理超平面的原象。在二维即 $n=2$ 的情况，共振相应于射影直线上的有理点。

若频率个数 $n > 2$，则有理超平面构成一个连通的处处稠密的集合，所以任一点的邻域都可以从其它任意点的邻域沿着共振曲面达到。

根据上面的讨论、双频率系统的基本效应就是可以通过共振曲面。在频率个数更多时，还需要考虑对共振曲面的相切。

B. 单个共振的效应

为了了解单个共振可能的效应，我们考虑一些简单的例子。

例1 考虑扰动系统：

$$\dot{\varphi}_1 = I,\ \dot{\varphi}_2 = 1,\ \dot{I}_1 = \varepsilon,\ \dot{I}_2 = \varepsilon\cos\varphi_1.$$

考虑共振 $\omega_1 = 0$。平均运动以非零速度与共振曲线 $I_1 = 0$ 相交。I_2 在由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 时间里在精确解中的变化，很容易看出，可由 Fresnel 积分给出

$$\Delta I_2 = \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(\varphi_0 + \varepsilon\frac{t^2}{2}\right)dt = c(\varphi_0)\sqrt{\varepsilon},$$

在平均系统中，J 不随时间变化。

我们注意到，对积分主要的贡献来自共振宽度为 $\sqrt{\varepsilon}$ 数量级的邻域；积分值本身也是 $\sqrt{\varepsilon}$ 数量级的而且依赖于初相 φ_0。

所以，在这个简单的例子里，与共振相交使得摄动方程具有相同初值 I 的解偏离开一个 $\sqrt{\varepsilon}$ 数量级的距离。这种偏离发生在共振曲面的宽度为 $\sqrt{\varepsilon}$ 数量级的邻域中。

出现 $\sqrt{\varepsilon}$ 数量级的量，这是所有与通过共振有关的问题的特点。

在例 1 中，通过共振只产生摄动方程轨道在底空间上的投影与平均系统轨道之间的很小的散射，但在下例中，摄动运动和平均运动就完全不同了。

例 2 考虑摄动方程组

$$\dot{\varphi}_1 = I_1,\ \dot{\varphi}_2 = I_2,\ \dot{I}_1 = \varepsilon,\ \dot{I}_2 = \varepsilon\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

平均方程是

$$\dot{J}_1 = \varepsilon,\ \dot{J}_2 = 0.$$

具有初始值 $J_1(0) = 1,\ J_2(0) = 1$ 的平均运动在 $t = \frac{1}{\varepsilon}$ 时为 $J_1(t) = 2,\ J_2(t) = 1$。

具有初始值 $I_1(0) = 1,\ I_2(0) = 1,\ \varphi_1(0) = 0,\ \varphi_2(0) = 0$ 的摄动运动，当 $t = \frac{1}{\varepsilon}$ 时，给出 $I_1(t) = 2,\ I_2(t) = 2$。

所以，摄动运动在底上的投影系统地朝向平均运动的另一侧运动。到 $t = \frac{1}{\varepsilon}$ 时，这两条轨道在底空间上已分离开一个很大的距离(数量级1)。

平均方程不适于用来描述摄动运动的原因在于，摄动轨道总是位于共振曲面上，而在接近共振时，平均化显然是不能用的，因为时间平均并不接近于在整个 n 维环面上的空间平均。

有一部分轨道被俘获在共振情况下，这是频率个数大于 1 系统的特点。

例 3 (А. И. Нейштадт) 考虑方程组[1]

---

1) 这个方程组是由单频率系统加上一个平凡的方程 $\dot{\varphi}_2 = 1$ 而得的。这样得出方程组的共振相应于单频率系统中频率为 0。

$$\dot{\varphi} = I,\ \dot{\varphi}_1 = 1,\ \dot{I} = \varepsilon(a + \sin\varphi_1 - I).$$

为了研究这个系统，考虑具有扭矩和摩擦的摆的方程 $\ddot{\varphi} = \varepsilon(a + \sin\varphi - \dot{\varphi})$，原来的系统很容易化为这个方程。引入慢时间 $\tau = \sqrt{\varepsilon}\, t$（$\tau \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$ 相应于区间 $t \sim 1/\varepsilon$）。用一撇表示对慢时间的求导，即得方程

$$\varphi'' = a + \sin\varphi - \sqrt{\varepsilon}\,\varphi'.$$

图 97 上画出了 $\varepsilon = 0$ 时的相图（U 是位能）。

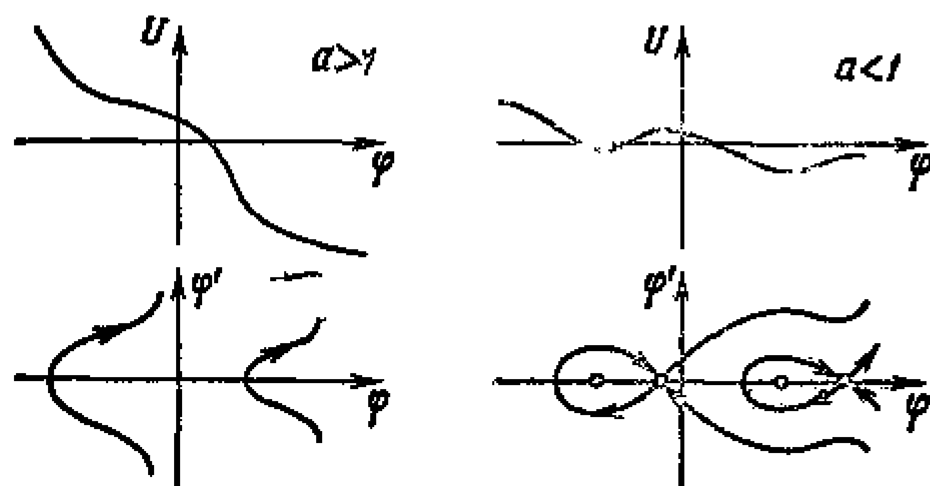


图 97

设 $a > 0$。按照扭矩 a 的大小不同而可能有两种情况。若 $a > 1$（扭矩比重力矩为大），这时 $\sin\varphi$ 不起本质的作用：I 是单调的。通过共振 $I = 0$ 相应于摆的旋转方向的变化。

若 $a < 1$，摆的运动可能有振动情况（相应于相图上分离曲线内部的环）。振动情况对应于轨道恒位于共振的附近。

小摩擦 $\sqrt{\varepsilon}\,\varphi'$ 的效应最基本的是它破坏了分离曲线的环。代之出现的是在 (φ, φ') 平面上沿分离曲线的无穷部分的狭带（宽度为 $\sqrt{\varepsilon}$ 数量级），其中的点就是被吸引的平衡位置俘获的相点；分离曲线内的整个区域也是俘获区域（图 98）。

回到原来的系统，我们看到当 $a < 1$ 时，共振有俘获区域。共振可以俘获整个轨道的一小部分（在 $1/\varepsilon$ 时间内被俘获的初始值 (I, φ) 集合的测度是 $\sqrt{\varepsilon}$ 数量级的）。对这些被俘获的初始值，慢变量 I 的变差，和平均方程解 J 的变差的差别在于它们在 $1/\varepsilon$

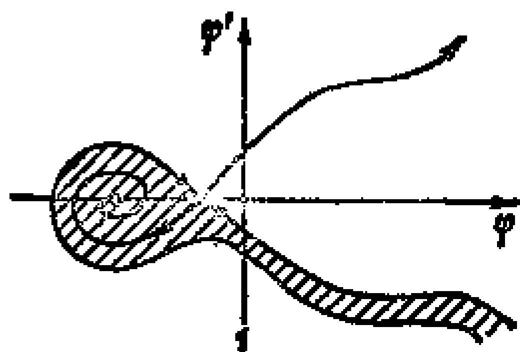


图 98

时间内可以达到1的数量级.

对于其余的初始值(即在一个测度为 $\sqrt{\varepsilon}$ 数量级的集外的初始值), I 和 J 之差在 $1/\varepsilon$ 时间内仍然很小(可以算出它是 $\sqrt{\varepsilon}\ln\varepsilon$ 数量级).

另一方面,若 $a>1$, 绝不会发生共振的俘获现象.

C. 两频率时的通过共振

考虑频率为 $\omega_1(I)$、$\omega_2(I)$ 的双频率系统:

$$\dot{\varphi}_1=\omega_1+\varepsilon f_1,\quad \dot{\varphi}_2=\omega_2+\varepsilon f_2,$$
$$\dot{I}_1=\varepsilon g_1,\qquad \dot{I}_2=\varepsilon g_2.$$

定义 如果频率之比 ω_1/ω_2 沿着摄动系统轨道的变化速度恒不为零:

$$\omega_2\frac{\partial\omega_1}{\partial I}g_1\neq\omega_1\frac{\partial\omega_2}{\partial I}g_2$$

就说此系统适合条件 A.

若频率比 ω_1/ω_2 沿平均方程轨道的变化速度恒不为零:

$$\omega_2\frac{\partial\omega_1}{\partial I}G_1\neq\omega_1\frac{\partial\omega_2}{\partial I}G_2$$

就说此系统适合条件 $\bar{\mathrm{A}}$.

我们将设所有考虑的系统都是解析的.

定理 若系统适合条件 A, 则摄动系统的慢运动 $I(t)$ 与平均系统的 $J(t)$ 之差在 $t=1/\varepsilon$ 时间内很小, 即若 $I(0)=J(0)$, 则当 $0\leqslant t\leqslant1/\varepsilon$ 时,有

$$|I(t)-J(t)|\leqslant c\sqrt{\varepsilon}.$$

◀证明的基础是，分离出共振数不大(但当 ε 很小时很大)的有限多个共振数不大的共振(当 ε 很小时，共振数很大)。在所取的共振曲面的小邻域之外则用通常的变量变换(§ 17)。

穿过所选的共振之邻域导致 $\sqrt{\varepsilon}$ 数量级的发散（如上例）。

把所选的共振附近的发散的结果与在共振之间区段上的漂移的结果联接起来即得以上估计．▶

详见 В. И. Арнольд [3]，А. И. Нейштадт [1]，А И Нейштадт 的学位论文[2]中包含了上述估计的证明，并以 $\sqrt{\varepsilon}$ 代替了第一篇引文中的 $\sqrt{\varepsilon}\ln^2\varepsilon$。

定理（А. И. Нейштадт）　若系统满足条件 A 和另一个条件 B（几乎恒满足），则在某一测度不超过 $c_1\sqrt{\varepsilon}$ 集合外的初值 (I_0, φ_0)，摄动系统的慢运动 $I(t)$ 与平均系统的运动 $J(t)$，在时间 $t=1/\varepsilon$ 内，相差一直很小；即若 $I(0)=J(0)$，有

$$|I(t)-J(t)|\leqslant c_2\sqrt{\varepsilon}\,|\ln\varepsilon|.$$

◀证明的基础是：选出有限多个共振数不大的共振，在所选出的共振曲面的小邻域之外，应用通常的变量代换。

在讨论所选的共振时，在一些圆周上作平均，这些圆周是非摄动运动共振时的轨道。

为此目的，固定共振数 (m_1, m_2)，其中 m_1, m_2 为互素，并在环面上选取新的角坐标 (γ, δ)，$\gamma=m_1\varphi_1+m_2\varphi_2$ 以代替 (φ_1, φ_2)。在共振时，因 $m_1\omega_1+m_2\omega_2=0$，故未摄动运动的角坐标 γ 的变率为零。

在底空间上也选用特殊的坐标 $\rho=m_1\omega_1+m_2\omega_2$。共振曲面的方程式为 $\rho=0$，即是说 ρ 标志对共振的偏离。共振曲面上的点用 σ 表示。在共振曲面附近，一点可以用它与共振的距离 ρ 及其在共振曲面上的投影 σ 来标志。

采用这样的坐标，摄动系统成为

$$\dot{\gamma}=\rho+\varepsilon F_1,\quad \dot{\delta}=\alpha(I)+\varepsilon F_2,\quad \dot{\rho}=\varepsilon F_3,\quad \dot{\sigma}=\varepsilon F_4,$$

函数 F_k 对 γ 与 δ 均以 2π 为周期。

对共振运动的轨道作平均化，就是对 δ 作平均。平均化系统成为

$$\dot{\gamma}=\rho+\varepsilon G_1,\quad \dot{\rho}=\varepsilon G_3,\quad \dot{\sigma}=\varepsilon G_4.$$

函数 G_k 对 γ 以 2π 为周期。它们依赖于 ρ 和 ε。

引入慢时间 $\tau=\sqrt{\varepsilon}\,t$ 与对共振的规范化距离 $r=\rho/\sqrt{\varepsilon}$. 用一撇表示对 τ 的导数，则平均方程可以写为

$$\gamma'=r+\sqrt{\varepsilon}\,G_1,\quad r'=G_3,\quad \sigma'=\sqrt{\varepsilon}\,G_4.$$

函数 G_k 的变元是 γ, $\sqrt{\varepsilon}\,r$, σ 和 ε.

在此方程中，令 $\varepsilon=0$, 即得一级近似方程

$$\gamma'=r,\quad r'=u(\gamma,\sigma),\quad \sigma'=0.$$

因此作为一级近似，我们得到了具有依赖于参数 σ 扭矩摆的方程. 这个一级近似方程的 Hamilton 性质是一件令人惊异的事，它是计算的结果，而不是预先就很清楚的.

考虑一级近似方程在 (γ,r) 平面上的相图. 它看起来好象 §18B 例 3 中 $a<1$ 或 $a>1$ 的情况，这要由函数 u 是否变号而定.

结果是，分离曲线只对共振数不太大的，不多的几个共振出现环(这里用到了条件 A). 事实上，条件 A 意味着函数 u 对于 γ 的平均值不是零. 对一级近似方程中大共振数的共振，我们得到与其平均值相差甚微的函数 u (因为这时，对 δ 的平均接近了在环面上的平均). 所以它处处非零. 这相应于一个扭矩大于重力矩的摆。这时一级近似方程既没有平衡位置也没有振荡区域.

当从一级近似方程转到全方程时，分离曲线的环变成共振的俘获带，如 § 18 B 的例 3 那样[1]. 相空间中俘获点集的测度可用数量级为 $\sqrt{\varepsilon}$ 的量来估计，只要一级近似方程的所有平衡位置都是简单的(即函数 u 的零点都是简单的，亦即当 $u=0$ 时，$\dfrac{\partial u}{\partial\gamma}\neq 0$).

这个简单性的限制也就是 Нейштадт 定理中的条件 B. 注意，这个条件是加在相应于有限多个共振的一级近似方程上的 (因为在

1) 与 § 18 B 之例 3 不同，在一般情况下，"被俘获" 的轨道并不一定永远接近共振.

条件 $\bar{A}$ 下一级近似方程只对有限多个共振有平衡位置)。

把关于 I 在非共振区间中的变化的估计与它在共振附近——即在相空间的非俘获部分上的估计结合起来即得定理的证明。详见 Нейштадт 上引的学位论文.▶

注 对于两频率系统，我们对条件 $\bar{A}$ 不成立的情况还没有研究过，这时快运动频率之比在平均运动中并不单调变化。在底空间为一维时不可能有这种性态。然而若慢变量 I 的个数 $\geqslant 2$，则频率比演进的逆转是一个通有的现象而不会被系统的摄动消除。

D. 多频率系统

我们对具有两个以上频率的情况比对双频率情况研究得少得多。对于通有的系统，快运动的频率对慢变量的几乎一切值都是不可通约的。所以自然地可以期待，对大多数初始值，平均法正确地描述了慢变量在 $1/\varepsilon$ 数量级的时间区间里的演进。

这个方向的第一批一般定理属于 Д.В.Аносов(见 Аносов[1]) 和 T. Casuga (见 Casuga[1])。

Аносов 的定理指出，对于任一正数 ρ，相空间的某一紧集中适合以下条件的初值集合的测度随 ε 而趋于 0：

$$\text{当 } I(0)=J(0) \text{ 时、} \max_{0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon}|I(t)-J(t)|>\rho.$$

如通常一样，这里的 I 是摄动运动的投影，J 是平均运动；这里假设了频率在以下意义下独立：频率对慢变量 I 的导映射 $\partial\omega/\partial I$ 的秩等于快变量的个数。

这个定理事实上是在更一般的条件下得证的：没有假设快运动的条件周期性，而是假设了它在几乎所有环面上的遍历性；和通常一样，假设平均运动的解 J 可以拓展到时间 $1/\varepsilon$。

在时间 $1/\varepsilon$ 内可能出现对平均运动大的偏离的小测度集（若 ε 很小)，对应于所有被共振俘获的轨道，或者由一个共振曲面到别的共振曲面上游荡的轨道，当频率个数大于 2 时，这也是可能的。

实际估计这个集的测度是有意义的。例如对于二频率系统，由 Нейштадт 的结果（见 § 18 C)，可知，在一个测度不大于 $c_1\sqrt{\varepsilon}$

的集外（还要对系统加上不多几个条件），有 $|I(t)-J(t)| \leqslant c_2\sqrt{\varepsilon}\,|\ln\varepsilon|$.

假设频率是独立的，即 $\partial\omega/\partial I$ 的秩等于频率个数.

定理（А. И. Нейштадт） 对于具有独立频率的系统，在一个具有小测度 χ 的集合外，平均法的误差，即 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon}|I(t)-J(t)|$，当 $I(0)=J(0)$ 时，可以用 $c_3\sqrt{\varepsilon}/\chi$ 从上方估计.

一个等价的表述法如下：用 $E(\varepsilon,\rho)$ 记某一固定紧集内初值集合，这些初值使得误差在指定的 ε 值下 $\geqslant\rho$. 这时

$$\operatorname{mes}E(\varepsilon,\rho)\leqslant c_4\sqrt{\varepsilon}/\rho.$$

证明可见 А. И. Нейштадт [3]. 这个证明引用了上述 Casuga 工作中的想法：对平均法中的变量变换加以修正（光滑化），使它不仅在共振的邻域外，而且处处是由光滑函数给出.

А. И. Нейштадт 的结果也可以解释为指出了 I 与 J 在相继的长为 1 的时间区间上偏离增量的统计独立性. 事实上，$I-J$ 在数量级 1 的时间 T 上增量数量级为 ε，而在区间 $1/\varepsilon$ 内长为 T 的区间个数的数量级为 $1/\varepsilon$. 如果在各个长为 T 的区间上的增量是独立的，则按概率论，在时间 $1/\varepsilon$ 中增量的期望值应正比于时间 T 上的增量与试验次数的平方根之积，即应有数量级 $\varepsilon\sqrt{1/\varepsilon}=\sqrt{\varepsilon}$.

Нейштадт 的定理确实给增量以这样的数量级，但不是对于一切初始值：需要除去一个测度为 $\sqrt{\varepsilon}$ 的初始值集，对这些初始值或者有共振的俘获，或者有不相应于独立增量格式的大偏离出现.

I 对 J 偏离增量独立性的思想，当快运动不是条件周期的，而是 Аносов 系统时，显然可以论证得充分得多. 这一点特别是由相空间中函数的中心极限定理给出的（见 Я. Г. Синай [1] 和 М. Е. Ратнер [1]）. 这个定理论证了当快运动和慢运动都与慢变量无关时的概率论处理方法：

$$\dot{I}=\varepsilon g(\varphi),\quad \dot{\varphi}=\omega(\varphi).$$

若我们关心系统在时间的数量级大于 $1/\varepsilon$（例如在 $1/\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$

或 $1/\varepsilon^2$ 数量级）时的性态，概率论的论证法特别有趣。如果在时间 $1/\varepsilon$，整个轨道的 $1/\sqrt{\varepsilon}$ 被共振俘获，而且在以后各个长为 $1/\varepsilon$ 的时间区间里，整个新轨道同样被俘获，则在数量级 $1/\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$ 的时间里，大部分轨道被共振俘获。在 $1/\varepsilon^2$ 时间以后就只能看到共振运动了。然而，在不同的长为 $1/\varepsilon$ 的区间里俘获的独立性是一个很强的附加假设；除了被共振俘获外，也会发生逆过程。

Нейштадт 定理中频率独立性的假设本质地限制了它的应用范围。条件

$$\operatorname{rank}\partial\omega/\partial I = \text{频率的个数},$$

可用下面的频率比的独立性条件代替：

$$\text{映射 } I\longmapsto(\omega_1(I),\cdots,\omega_n(I)) \text{ 之秩为 } n-1.$$

然而当慢变量个数很小（小于频率个数减 1）时，这个条件也不能满足。

想把 Нейштадт 定理推广到慢变量个数本质地小于频率个数的情况，需要研究 Euclid 空间的子流形上的 Diophantine 逼近。

对于适合某些非蜕化条件（即某些行列式不为 0）的映射

$$\omega:\ \mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^n,\ k<n,$$

对 $\mathbf{R}^k$ 中几乎所有的 I 有同样的如下估计

$$|(m,\omega(I))|\geqslant Cm^{-\nu},\ m\in\mathbf{Z}^n\backslash 0.$$

此式对 $\mathbf{R}^n$ 中几乎所有的点成立。

这类结果对于特殊的曲线（例如 $\omega_s=I^s$）已经得到过，例如，可见 В. Г. Спринджук [1]；关于一般情况可以参看 А. С. Пяртли [1]。

注意，这些工作既没有解决上述的推广 Нейштадт 定理的问题，也没有解决 ν 的准确估计这一算术问题（顺便地说，这对我们的问题意义不大，因为 ν 的变化只会改变方程的所需要的光滑性）。

§ 19. Hamilton 系统的平均化

本节中简单地叙述，当未摄动系统和摄动系统都是 Hamilton 系统时，平均法的特点。

A. 平均系统的计算

设在未摄动系统中已引入作用量——角变量，即这样的典则共轭变量[1] ($I_1, \cdots, I_n; \varphi_1, \cdots, \varphi_n \mod 2\pi$) 使 Hamilton 函数 H_0 只依赖于作用量变量 I. Hamilton 典则方程本来形如

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I}, \quad \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi},$$

故当 $H = H_0(I)$ 时，有

$$\dot{\varphi} = \omega(I), \ \dot{I} = 0.$$

所以频率向量 $\omega(I)$ 等于 $\frac{\partial H_0}{\partial I}$.

摄动系统由 Hamilton 函数 $H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon)$，函数 H_1 对角变量 φ 以 2π 为周期。因此摄动运动的方程成为

$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon \partial H_1/\partial I, \ \dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}.$$

定理 在具有 n 个自由度和 n 个频率的 Hamilton 系统中，慢变量在下述意义下是不发生演化的，即平均系统形如 $\dot{J} = 0$.

◀当计算 $\frac{\partial H_1}{\partial \varphi_i}$ 在 n 维环面上的积分时，可以先对 φ_i 求积．这个一维积分等于周期函数 H_1 在一个周期上的增量，即为 0. ▶

这个简单的定理表明，在 Hamilton 系统中，慢变量的演化与非 Hamilton 系统的情况差异极大。

B. Колмогоров 定理

设各频率在以下意义下独立，即频率对作用量的导映射 $\frac{\partial \omega}{\partial I}$ 是非蜕化的。在这时，A. H. Колмогоров 在 [1] 中证明了，大多数不变环面 $I =$ const. 在小的 Hamilton 摄动下只是稍有变形

---

1) 若坐标 (I, φ) 使相空间的辛构造成为 $\omega = \Sigma dI_k \wedge d\varphi_k$，则 (I, φ) 称为典则共轭的.

而不致消失。对大多数初值，未摄动系统和摄动系统的相曲线都处处稠密地填满不变环面。

将 $(n-1)$-维曲面 $H_0(I)=h$ 映入 $(n-1)$-维射影空间 $I\longmapsto\left(\frac{\partial H_0}{\partial I_1},\cdots,\frac{\partial H_0}{\partial I_n}\right)$，并令其 Jacobi 行列式非 0，则摄动系统的不变环面大体填满 Hamilton 函数H的 $(2n-1)$-维等值流形 $H(I,\varphi)=h$（其余集只有小测度）。

特别地，若频率个数 $n=2$，这些二维环面将把三维等值流形分割开来。因此即使对于那些不在环面上的相曲线，作用量变量在无穷长的时间区间上也变化极小。从两个不变环面的间隙发出的相曲线也不能逸出这个间隙。

若频率个数大于2，环面不能分割 Hamilton 函数的等值流形，某些相曲线(构成小测度集)可以在不变环面之间的共振曲面附近游荡而远离作用量变量的初始值。

有这样的例子（见 В. И. Арнольд [2]），其中确有这样的逸出发生。在这些例子中，逸出的平均速度指数地减小（数量级 $e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}$）。

C. Нехорошев 定理

可以证明，在每个通有的 Hamilton 系统中，作用量变量与其初始值的偏离如此小，所以不能用摄动理论的任意近似方法探知(即是说，对任意的 N，它不表现为可以在数量级 $1/\varepsilon^N$ 的时间内观测到的偏离，ε 是摄动参数)。

准确些说，Н. Н. Нехорошев 在 [1]，[2]，[3]和他在莫斯科大学的学位论文(1973)中证明了，对几乎所有的未摄动 Hamilton 函数 $H_0(I)$，都存在着正数 a 和 b 使得摄动系统的作用量变量 I 在时间 $T=e^{1/\varepsilon^a}$ 中的平均变化速度不超过 ε^b。

注意，当 $\varepsilon\to 0$ 时，T 增长得比 $1/\varepsilon$ 的任意次幂都快，因此对任意 N，在时间 $1/\varepsilon^N$ 内，I 的变化很小。

常数 a 和 b 依赖于未摄动 Hamilton 函数 H_0 的几何性质。

例如，若 H_0 是严格凸的$\left(\text{即矩阵 } \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \text{ 为正定的}\right)$，则可取 $a = 2/(6n^2 - 3n + 14)$，$b = 3a/2$，n 为频率个数。

在以下意义下，定理是对几乎所有的 H_0 证得的，即例外的 H_0 的 Taylor 系数满足一组无穷多个显示写出的代数方程。Нехорошев 称这些例外的函数为*非陡的*。对于非陡的 H_0，在数量级为 $1/\varepsilon$ 的时间内发生逸出是可能的。在指数慢的逸出的例子中（§19，B），H_0 是陡的。

Нехорошев 定理的证明基于 Hamilton 系统中的平均化的以下简单性质。

设对慢变量 I 的某些值，具有 n 个频率的 Hamilton 系统有共振 $(m, \omega) = 0$ 发生。于是在相应的共振曲面附近，很自然不是在 n 维环面上作平均化，而是在低维的共振环面上作。若共振是单重的，即若整数分量的向量 m 是唯一确定的，则共振环面的维数为 $n - 1$。若 m 的方程 $(m, \omega) = 0$ 有 k 个有理独立解，则快运动的轨道处处稠密地填满 $n - k$ 维共振环面，正是在这些环面上作平均。

定理 当在相应于共振 $(m, \omega) = 0$ 的共振环面上作平均时，平均系统的作用量变量 I 的演化方向在共振向量 m 所张的平面上[1]（在单重共振情况下，演化方向是唯一决定的，这就是向量 m 所张直线的方向）。

◀为简单起见，我们考虑单重共振的情况。我们用 γ 记角坐标，它在共振中是不变的：$\gamma = (m, \varphi)$。为对摄动系统作平均，只需将 Hamilton 函数对快变量进行平均。结果可得平均的 Hamilton 函数 $H_0 + \varepsilon \overline{H}_1$，$\overline{H}_1$ 依赖于作用量变量和一个角变量 γ。

平均运动方程给出

$$\dot{I} = \varepsilon \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial \varphi}$$

---

1) 注意，作用量变量空间的仿射构造是唯一决定的，而频率空间对偶空间的向量与作用量变量空间的向量的完全相同，也是唯一决定的。

另一方面 $\dfrac{\partial \bar{H}_1}{\partial \varphi}=\left(\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \gamma}\right)\left(\dfrac{\partial \gamma}{\partial \varphi}\right)$ 有向量 $\dfrac{\partial \gamma}{\partial \varphi}=m$ 的方向. ▶

Нехорошев 定理可以由上面的定理如下论证得出。只有在共振时并在共振向量生成的方向上才可能有快演化（速度为数量级 ε）。然而，加于 H_0 上的陡性条件（例如设 H_0 为严格凸即可）保证了这演化将在引出共振曲面的方向上。因此，共振被破坏而演化只持续一个短时间；结果确实得到了平均速度的指数小上界。

另一方面，如果陡性条件被破坏，则在共振曲面上存在一条曲线，它在各点的切线都位于共振向量所张的平面内。沿这样的曲线，演化可以有数量级 ε 的平均速度，这将导致作用量变量在 $1/\varepsilon$ 数量级时间里对初始值的偏离。

§ 20. 绝热不变量

这里对具有缓变参数的 Hamilton 系统的绝热不变量理论的基本结果作一个综述。

A. 绝热不变量的概念

在考虑具有缓变参数的 Hamilton 系统时，产生了奇特的现象：通常互相独立的量，渐近地（即当参数变化速度趋于 0 时）变成彼此的函数。

例如考虑变长度摆。摆长与振幅通常是独立的：如果改变振荡的摆长，则在恢复到原有摆长时，振荡的振幅可以任意地改变，这要由摆长变化的特定方式而定。

虽然如此，事实上若摆长的改变足够慢，则在长度恢复时，振荡的振幅几乎不变。此外摆的能量与频率之比在整个过程中也几乎不变，虽然当摆长改变时，能量与频率都在变化。

当 Hamilton 系统的参数充分缓慢变化时，渐近保持不变的量称为**绝热不变量**。

准确些说，考虑 Hamilton 微分方程组 $\dot{x}=v(x,\lambda)$，λ 是参数。

相点 x 和参数 λ 的函数 I 称为绝热不变量，如果对慢时间 $\tau=\varepsilon t$ 的任意光滑（充分多次可微）函数 $\lambda(\tau)$，量 I 沿着方程 $\dot{x}=v(x,\lambda(\varepsilon t))$ 解 $I(x(t),\lambda(\varepsilon t))$ 的变化在时间 $0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon$ 内的变化很小，这里 ε 充分小。

B. 具有一个自由度的系统的绝热不变量的作法

设 Hamilton 函数 $H(p,q,\lambda)$ 对 λ 的每一个值都有封闭的相曲线 $H(p,q,\lambda)=h$（例如包围一个平衡位置，在该处小振动的频率非 0）。

用 $I(p,q;\lambda)$ 记当 λ 取定值时过点 (p,q) 的相曲线所包围的面积除以 2π（这是一个习惯）。量 I 称为作用量变量。

例　对于摆有 $H=\frac{ap^2}{2}+\frac{bq^2}{2}$；相曲线 $H=h$ 是椭圆，其面积为 $\pi\sqrt{2h/a}\sqrt{2h/b}=2\pi h/\sqrt{ab}$。振动频率为 $\omega=\sqrt{ab}$。所以对于摆有

$$I=H/\omega.$$

这里 (a,b) 起了参数 λ 的作用。

定理　作用量变量 I 是自由度为 1 的 Hamilton 系统的绝热不变量。

C. 作用量的绝热不变性的证明

证明的基础是平均法。用 φ 表示封闭相曲线的角坐标，其取法如下，使得 φ 与曲线上运动的时间成正比且每旋转一周就增加 2π（当然角坐标 φ 与作用量变量 I 都不仅依赖于相坐标 (p,q)，而且也依赖于参数 λ）。

这时系统的方程在每一个确定的 λ 值处可写为平均法中标准的未摄动方程的形式：

$$\dot{\varphi}=\omega(I,\lambda(\tau)),\ \dot{I}=0,\ \dot{\tau}=0.$$

如果 λ 缓慢地改变，则可得到摄动方程

$$\dot{\varphi}=\omega+\varepsilon f,\ \dot{I}=\varepsilon g,\ \dot{\tau}=\varepsilon,$$

f 与 g 对 φ 有周期 2π。

我们现在来作平均化系统。

引理　作用量变量是平均化系统的初积分（亦即 g 对 φ 的平均值为 0）。

◀考虑由对应于参数初始值的闭相曲线 $I=I_0$ 所围的区域。根据平均化的定理，经过区间 $\left[0,\ \frac{1}{\varepsilon}\right]$ 内的任意时间 t，此区域的象除了相差数量级为 ε 的误差以外，是一个由参数值为 $\lambda=\lambda(\varepsilon t)$ 的闭相曲线围成的区域。

但运动方程是 Hamilton 方程(虽然是非自治的)。由 Liouville 定理：象的面积等于原像的面积，所以 $I_t=I_0$。▶

推论　摆的能量与频率之比是绝热不变量。

问题　小球在两个直立的绝对弹性墙之间运动，墙间距离缓慢变化。证明小球速度与墙间距离的乘积是一绝热不变量。

问题　磁场中有荷电粒子运动，此磁场当粒子在围绕磁力线的 Lamour 环时缓慢变化。证明粒子垂直于磁力线速度分量的平方与磁场强度之比 $v_\perp^2/H$ 是一个绝热不变量(例如见 Л. А. Арцимович [1])。

D. 多频率 Hamilton 系统的绝热不变量

考虑含参数 λ 的多频率 Hamilton 方程组 $\dot{p}=-H_q$, $\dot{q}=H_p$。设对固定的 λ 它有 Hamilton 函数为 $H_0(I,\lambda)$ 的作用量——角变量：$\dot{\varphi}=\omega(I,\lambda)$, $\dot{I}=0$ $\left(\omega=\frac{\partial H_0}{\partial I}\right)$，而 I 非蜕化地依赖于 n 个作用量变量，即

$$\det\left(\frac{\partial\omega}{\partial I}\right)=\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}\right)\neq 0.$$

和上面一样，设参数 λ 开始缓慢变化。p 与 q 的变化用具有变化的 Hamilton 函数的 Hamilton 方程组来描述，而变量 I 的性态则用摆动方程组来描述(我们设 $\lambda=\varepsilon t$, ε 是小参数)。

引理　摄动方程组是具有单值 Hamilton 函数 $H=H_0(I,\lambda)+\varepsilon H_1(I,\varphi,\lambda,\varepsilon)$ 的 Hamilton 方程组。

引理的证明或者需要一些关于辛几何，或 Hamilton 形式化的知识(例如见 В. И. Арнольд [9])，或者要作繁冗的计算，在

此从略。

推论 作用量变量 I 是平均系统的初积分。

◀事实上，平均化后的函数——即方程 $\dot{I} = -\varepsilon \dfrac{\partial H_1}{\partial \varphi}$ 的右方——是周期函数的导数，从而其平均值为 0（见 §19,**A** 的定理）。▶

把这个推论与 Нейшнадт 定理（§ 18 **D**）结合起来，可得以下的结论：

具有几个频率以及缓变参数的 Hamilton 系统的作用量变量 I 的变化在时间 $1/\varepsilon$ 内是小于 ρ 的，这里我们略去原来相空间中一个测度不大于 $c\sqrt{\varepsilon}/\rho$ 的初始值集。（这里假设相空间是紧的而导映射 $\dfrac{\partial \omega}{\partial I}$ 是非蜕化的）。

定义 Hamilton 系统的相点和一个参数的函数 F 称为一个几乎绝热不变量，如果对任一 $\rho > 0$，紧相空间中的如下初始值集的测度随 ε 而趋于 0，这些初始值使得 F 沿着具有缓变参数的 Hamilton 方程的解的变化在 $1/\varepsilon$ 时间中超过 ρ。

所以，作用量变量 $(I_1, \cdots, I_n)$ 是任意具有多个频率的非蜕化 Hamilton 系统的几乎绝热不变量。

E. 绝热不变量当 $t \gg 1/\varepsilon$ 时的性态

虽然绝热不变量在时间 $1/\varepsilon$ 内变化很小，没有理由设想它的变化在大的时间区间(例如数量级为 $1/\varepsilon^2$) 内也变化很小，更不说无穷时间区间了。

例 考虑具有缓慢周期变化的参数的摆：

$$\ddot{x} = -\omega^2(1 + a\cos \varepsilon t)x.$$

不论 ε 多么小(即不管参数变动多么慢)，都可能出现参数共振，这时平衡位置成为不稳定的。很清楚，在参数共振时，绝热不变量将无界地变动（在无穷大时间区间内）。

事实表明，具有周期慢变参数系统的绝热不变量的这种性态

正是与此系统的线性相关联的；确切地说，是与振动周期与振幅无关相联系的。若在具有周期慢变参数的 Hamilton 系统中、快运动的频率对作用量变量的导数非 0，则作用量变量在无穷时间区间中变化也很小(见 В. И. Арнольд [1])。

证明基于以下事实，这个情况下和 Kolmogorov 定理中一样(见 §19 B)，存在着不变环面。

另一个有趣的情况是，当 $t\to-\infty$ 和 $t\to+\infty$ 时，参数的变化有确定的极限。这时讲绝热不变量在 $-\infty$ 和 $+\infty$ 时之值，以及绝热不变量在无穷大时间区间的增量 $\Delta I = I(+\infty)-I(-\infty)$，都是有意义的。

对于线性方程

$$\ddot{x} = -\omega^2(\varepsilon t)x,\ \omega(-\infty) = \omega_-,\ \omega(+\infty) = \omega_+,$$

可以证明，绝热不变量在无穷时间的增量对 ε 是指数地小(假设函数 ω 是解析的，它不应变号，而且在无穷远处的性态是合理的)。此外可以显式地给出绝热不变量当 $\varepsilon\to 0$ 时的渐近式的主项(见 A. M. Дыхне [1]，以及 A. A. Слуцкин [1])。对于高维系统也曾得到类似的结果。准确的提法和证明可以在 M. B. Федорюк[1] 中找到(但是其中没有引述物理学家更早的工作)。

一维非线性系统的绝热不变量的增量问题也曾由物理学家研究过。他们证明了增量比 ε^N 更小，即是说绝热不变量的变化在任意阶的摄动理论中都不出现 (A. Lenard [1])。Нейштадт 在解析情况下也得到了指数估计。

关于具有若干个自由度的非线性系统，和物理文献所说的相反，作用量变量一般说来没有绝热不变性。它们只是几乎绝热不变量，即是说，对大多数初始值变化很小。

§ 21 Seifert 叶层构造中的平均化

在研究一个闭相曲线的邻域时，会遇到这样的情况，即邻近相

曲线的一次近似也是闭的；但是他们在闭合前要绕着初始的闭相曲线转若干次（即所谓共振情况）。讨论一个系统接近于共振时的性态或称近似共振运动，会遇到平均法的一个特别的形式：在 Seifert 叶层构造中的平均化。

A. Seifert 叶层构造

Seifert 叶层构造就是把直积 $\mathbf{R}^2\times S^1$ 分为圆周，其作法如下：在三维 Euclid 空间中作一个具有水平底面和铅直轴的柱面。将柱的内域分成铅直的线段，并在将上底旋转角度 $2\pi p/q$ 后，把上下底的点视为恒同（即将下底的 $(z, 0)$ 点与上底的 $(Az, 1)$ 点粘起来，A 就是角度 $2\pi p/q$ 的旋转，p 与 q 互质）。

定义 将三维流形 $\mathbf{R}^2\times S^1$ 分解为圆周如下，即将柱的内域用平行于轴的线段分解，再将上底旋转一个角度 $2\pi p/q$ 后与下底粘连，所得即称为 (p, q) 型 Seifert 叶层构造.

于是 Seifert 叶层构造中的每一个圆周，除了一个由柱轴而得的中心圆以外，都是由 q 个线段粘接而成。

考虑 (p, q) 型 Seifert 叶层结构的空间 $\mathbf{R}^2\times S^1$ 的 q 重覆盖。覆盖空间本身也微分同胚于 $\mathbf{R}^2\times S^1$. 原流形的 Seifert 叶层构造使覆盖流形分解为圆周。这个分解也可看作一个 $(p,1)$ 型 Seifert 叶层结构（旋转 $2\pi p$ 以后再粘接）。

$(p, 1)$ 型 Seifert 叶层结构就是纤维化为圆周再作一个直积。在覆盖时，原 Seifert 叶层构造的每个圆周都被 q 个圆周微分

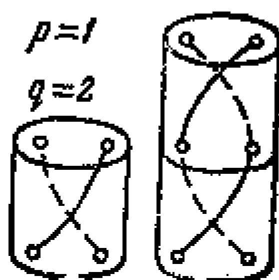


图 99

同胚地覆盖，例外的只有中心圆周被覆盖 q 次(图 99)。

B. Seifert 叶层构造平均化的定义

设在 Seifert 叶层构造的空间中给出一个向量场。这时在覆盖的叶层构造中也有一向量场。场中每个向量可以投影到覆盖的叶层构造的底空间 $\mathbf{R}^2$ 上。我们把这样得到的底空间上的向量沿覆盖叶层结构的叶片作平均化。在底空间的每一点上得到一个确定的向量。上述(从 Seifert 叶层构造空间中的场)作出平面上的场的作法，就称为对原向量场沿 Seifert 叶层构造平均化。

换言之，沿 (p, q) 型 Seifert 叶层结构作平均化就是在覆盖的 q 叶覆盖叶层结构中作通常的平均化。

C. 平均场的性质

在通常的纤维空间中作平均化，可在底空间上得到任意向量场。在 Seifert 叶层构造中作平均化，在底空间上可以得到有特定性质的向量场。例如，若 $q > 1$，则在中心上平均场的向量为 0。

定理 在 (p, q) 型 Seifert 叶层结构中作平均化，可得一个在平面上旋转角为 $2\pi p/q$ 的旋转下不变的场。

◀将初始柱面的一个底面实现为底空间。在 Seifert 叶层构造上的平均化就是在平行于柱轴的 q 个线段上的积分。在旋转一个角度 $2\pi/q$ 后，这 q 个线段互变。现在容易看到，平均化与旋转一个角度 $2\pi/q$ 是可换的(旋转后，仍然是在这 q 个区间上求平均，但次序不同)。▶

D. 一个例子

考虑微分方程

$$\dot{z} = i\omega z + \varepsilon f(z, t), \quad z \in \mathbf{C},$$

f 是一复值函数(但不一定全纯)而对实时间变量 t 以 2π 为周期，ε 是一个小参数。对应于 $\varepsilon = 0$ 的方程称为未摄动方程。

设未摄动运动的频率 ω 是有理数 p/q，或接近于它。

$\omega = p/q$ 时的未摄动方程的积分曲线构成 $\mathbf{C}\times S^1=\{z, t \bmod 2\pi\}$ 中的 p/q 型 Seifert 叶层构造。

沿此叶层构造平均即得平均化方程

$$\dot{z} = \varepsilon F(z),$$

这里的向量场 F，在 z 平面上角度为 $2\pi/q$ 的旋转下，仍成为自身。

E. 对称场的 Taylor 系数

我们将用一个复值函数(不一定全纯) F 定义复 z 平面上的一个向量场。F 对 x, y 的 Taylor 级数也可写成 z 和 $\bar{z}$ 的 Taylor 级数。我们将它写为

$$\Sigma F_{k,l} z^k \bar{z}^l.$$

命题　若场 F 在角度为 $2\pi/q$ 的旋转下不变，则系数 $F_{k,l}$ 中只有 $k-l\equiv 1 \bmod q$ 的那些不为 0。

◀由 Taylor 级数的唯一性，级数的每一项都定义一个在旋转下不变的向量场。在 z 旋转一个角 $2\pi/q$ 后，向量 $z^k\bar{z}^l$ 旋转一个角 $(k-l)2\pi/q$。当且仅当 $k-l\equiv 1 \bmod q$ 时，它才是旋转 $2\pi/q$。▶

考虑非负整点 (k, l) 的格子所组成的象限。在这些格点中特别标出那些适合 $k-l\equiv 1 \bmod q$ 的格点。点 $(1,0)$ 以及由它发出的平行于象限角平分线上的格点总是特有意义的。这些点对应于场 $z\Phi(|z|^2)$，它在旋转任一角时都是不变的。

点 $(0, q-1)$ 总是特有意义的。这点对应于场 $\bar{z}^{q-1}$，它在旋转角 $2\pi/q$ 下不变。所有这样的点组成由象限边界上的点 $(0, mq-1)$ 和 $(mq+1, 0)$ 发出的平行于角平分线的一串直线。

F. 三阶对称性的情况

考虑关于三阶变换群为不变的向量场(即 $q=3$ 的情况)。

对 $120°$ 旋转为对称场的 Taylor 级数的次数最低的单项式，由 (k, l) 平面上特别标出的点中 $k+l$ 为最小的部分给出。最能

两个单项式是 z 与 $\bar{z}^2$。所以平面上每一个在旋转 $2\pi/3$ 下不变的场都有如下形式

$$F(z)=az+b\bar{z}^2+O(|z|^3).$$

略去最后的项即得最简单的具有三阶对称性的微分方程

$$\dot{z}=az+b\bar{z}^2.$$

系数 a, b 和相坐标 z 都是复的。

我们假设 $a\neq 0$, $b\neq 0$. 用适当的数乘 z, 并改变时间单位可得 $b=1$, $|a|=1$。图 100 给出了 $a=e^{i\varphi}$, $b=1$ 时相图的变化。对任意 a, 都有四个平衡位置分别位于一个等边三角形的顶点与中心上。对纯虚的 a, 系统是 Hamilton 系统。为了对任意 a 研究这系统，只需注意这系统恒可从此 Hamilton 系统通过形式地用复数乘 z 和 t 而得到 (即在 z 平面上作旋转和伸长且将 Hamilton 场旋转一个定角)。

G. 略去的项的效果

现在我们试图考虑略去的项 $O(|z|^3)$。设 $|a|$ 很小(这相应于原微分方程组中几乎发生三阶共振)。这时奇点的三角形半径也很小($|a|$ 的数量级)。我们在 $z=0$ 的邻域中考虑对称的向量场，这个邻域比 $|a|$ 大，但比 1 小。

在这个邻域中，略去的项 $O(|z|^3)$ 比留下的项是小的。容易证明，如果相图是结构稳定的，则它们的效果并没有本质地改变相图的形状。在现在的情况下，相图只对纯虚的 a 是结构不稳定的，这时系统是 Hamilton 系统。如果我们考虑略去的项，系统的 Hamilton 性质不会保存。

对于复 a 平面的每一个不与虚轴重合的射线，并当 $|a|\neq 0$ 充分小，$\varphi\neq\pm\frac{\pi}{2}$ 时，在原点的邻域中全系统的相图(设 $b\neq 0$)大约即如图 100 那样，这邻域比 1 很小，但比 $|a|$ 则很大。

研究 a 通过虚轴时相图的变化是一个特殊的问题，我们将在第六章再讨论它。在通有的情况下，这个变化恰由 Taylor 级数

的一项来决定：一切情况均如方程

$$\dot{z} = az + \bar{z}^2 + cz|z|^2$$

一样，这里 $\operatorname{Re} c \neq 0$.

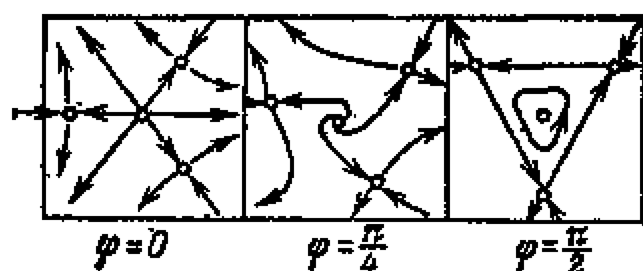


图 100

H. 对原方程的应用

以上对平均方程所作的分析，当 ε 充分小时，对原方程给出了引人注目的信息。我们不给出证明而只把所得的结果翻译成原方程相曲线的语言。

等边三角形顶点上的三个平衡位置相应于原方程的一个封闭积分曲线。如果未摄动运动的频率 ω 与共振频率 $p/q = \frac{1}{3}$ 之差趋于 0，这个封闭曲线与原来的封闭曲线重合而且绕它三周。

平均系统平衡位置的稳定性可解释为摄动系统周期解的稳定性等等。唯一本质的差别只有在平均系统有从鞍点到鞍点的分离曲线时才出现。

在摄动系统中有闭曲线对应于鞍点。闭曲线的不变流形的稳定与不稳定则对应于进入与离开分离曲线。但是如果在平均系统中分离曲线在相交时会融合，则在摄动系统中一般并不如此，为了能看出摄动系统的不变流形怎样在三维空间中相交，我们考虑三维空间的截面 $t = 0$.

平面 $t = 0$ 与我们的解在三个点相交，它们就是 Poincaré 映射三次迭代的不动点。这三个不动点各有一个进入的和一个离去的不变流形（曲线）。但它们在相交时不一定重合（与平面方程的

相曲线不同，后者一旦相交必定永远重合)。

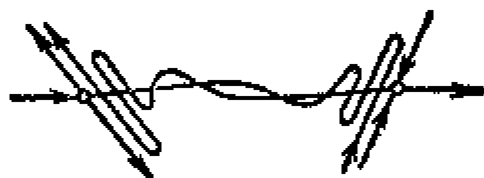


图 101

在 Poincaré 映射的逐次作用下，由不变流形的相交弧可以构成很复杂的网络称为等倾图[1](图 101)。

I. 高阶共振

对于 $q > 3$ 阶共振，平均方程的第一个非平凡的近似可以用同样方法得出

$$\dot{z} = az + zA(|z|^2) + \bar{z}^{q-1}.$$

特别地，对 4 阶共振可得

$$\dot{z} = az + Az|z|^2 + \bar{z}^3.$$

这些系统以及对应于 2 阶共振的系统，将在第六章中详细讨论。

图 102 中画出了相应于五阶共振的平均方程相图的变化，这个方程是

$$\dot{z} = az + Az|z|^2 + \bar{z}^4,$$

其中 $\mathrm{Re}A < 0$，$\mathrm{Im}A < 0$，$a = \varepsilon e^{i\varphi}$，$\varepsilon \ll 1$。

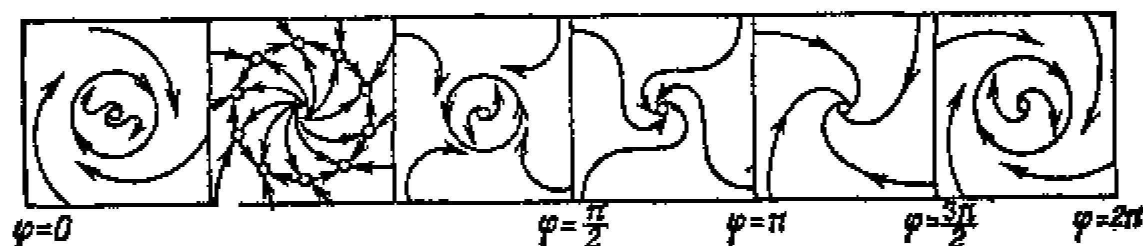


图 102

1) 若一平面微分同胚的不动点进入与离去的不变流形相交而不重合，我们就称此点为等倾的。

第五章　标准形式

处理微分方程的一个十分富有成果的方法在于，并不是去解出它们而是把它们化为尽可能简单的形状。Poincaré 的标准形式理论就给出了微分方程在平衡位置或周期运动附近可能化成的最简单形式。

化标准形是用幂级数来进行的。这个幂级数的变元是对平衡位置或周期运动的偏差。这些级数并不一定恒收敛。但是即令这些级数发散，标准形式方法也是研究微分方程的有力工具。级数的前几项就已给出关于解的性态的，值得注意的信息，它们足以作出相图。标准形式方法也是分枝理论的基本研究工具，在那里用它来研究一族含有参数的方程。

本章中将叙述标准形式理论的最简单的基本命题。

§22　形式地化为线性标准形式

Poincaré 定理断言，"非共振的"向量场可以在形式幂级数类中用形式微分同胚化为其在奇点处的线性部分。现在我们来提出非共振条件。

A. 共振

代替向量场我们考虑 n 个变量的复系数形式向量幂级数 $v(x)=Ax+\cdots$。设 A 的固有值各异。

定义　A 的全组固有值 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 称为**共振**的，若固有值之间存在着整系数关系式如下：

$$\lambda_s=(m,\lambda),$$

这里 $m=(m_1,\cdots,m_n)$，$m_k\geqslant 0$，$\Sigma m_k\geqslant 2$。此式称为**共振关系**

式。数 $|m|=\Sigma m_k$ 称为共振的阶。

例 关系式 $\lambda_1=2\lambda_2$ 是2阶共振，$2\lambda_1=3\lambda_2$ 不是共振，$\lambda_1+\lambda_2=0$ 是3阶共振（准确地说，由此关系式可得共振 $\lambda_1=2\lambda_1+\lambda_2$）。

B. Poincaré 定理

以下的定理是 Poincaré 学位论文的基本结果。

定理 若矩阵 A 的固有值是非共振的，则方程

$$\dot{x}=Ax+\cdots,$$

可用形式的变量变换 $x=y+\cdots$ 化为线性方程

$$\dot{y}=Ay$$

（“…”表示从高于一次的项开始的级数）。

Poincaré 定理的证明在于逐步消去右方的二次，三次等更高次项。每一步都以求解线性同调方程为基础。我们就从它的推导开始。

C. 同调方程

令 h 为 y 的 $r\geqslant 2$ 阶向量多项式[1]，且 $h(0)=h'(0)=0$。

引理 微分方程 $\dot{y}=Ay$ 可用变换 $x=y+h(y)$ 化为

$$\dot{x}=Ax+v(x)+\cdots,$$

$v(x)=\dfrac{\partial h}{\partial x}Ax-Ah(x)$，而“…”表示阶数高于 r 的项。

◀ $$\dot{x}=\left(E+\frac{\partial h}{\partial y}\right)Ay=\left(E+\frac{\partial h}{\partial y}\right)A(x-h(x)+\cdots)$$

$$=Ax+\left[\frac{\partial h}{\partial x}Ax-Ah(x)\right]+\cdots.$$ ▶

注 方括号中是向量场 Ax 与 $h(x)$ 的 Poisson 括弧。

用 L_A 记变任意场为它与线性场 Ax 的 Poisson 括弧的算子：

---

[1] 即分量为多项式的向量场。向量多项式是向量单项式的和，后者是这样的场，其一个分量是单项式，其余分量都是0，多项式的阶就是最低次项的次数

$$L_A h = \frac{\partial h}{\partial x} Ax - Ah(x).$$

定义　与线性算子 A 相关的同调方程即

$$L_A h = v,$$

这里 h 是未知的而 v 是已知向量场.

D　同调方程的解

线性算子 L_A 映形式向量场空间到其自身. 它使任意次齐性向量多项式空间不变.

现在计算 L_A 的固有值与固有向量. 记 e_i 为算子 A 的相应于固有值 λ_i 的固有向量. 用 $(x_1,\cdots,x_n)$ 表示以 $(e_1,\cdots,e_n)$ 为基底的坐标. 同样 x^m 表示 $x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}$.

引理　若算子 A 为对角算子, 则 L_A 在齐性向量多项式空间上也是对角算子. L_A 的固有向量是向量单项式 $x^m e_s$. L_A 的固有值线性依赖于算子 A 的固有值,即有

$$L_A x^m e_s = [(m,\lambda) - \lambda_s]x^m e_s.$$

◀令 $h = x^m e_s$, 则向量 $\frac{\partial h}{\partial x} Ax$ 只有第 s 个分量非 0, 而此分量等于

$$\frac{\partial x^m}{\partial x} Ax = \Sigma \frac{m_i}{x_i} x^m \lambda_i x_i = (m,\lambda)x^m.$$

此外, $Ah(x) = \lambda_s h(x)$. ▶

如果算子 L_A 的所有固有值均非 0, 则它可逆.

推论　如果 A 的全部固有值均为非共振的, 则同调方程 $L_A h = v$ 对任意在 0 点没有自由项与线性部分的形式向量场 v, 在形式幂级数 h 之类中可解.

如果没有 k 阶共振, 则同调方程 $L_A h = v$ 对任意 k 次齐性向量多项式 v, 在 k 次齐性向量多项式类中可解(这里 $k \geq 2$).

注. 若算子 A 是非对角的(即有 Jordan 方块),则算子 L_A 也有 Jordan 方块. 但容易看到, 固有值仍由上述对角情况的公式给出. 所以对于非共振固有值 (即令是重的), 算子 L_A 在齐性向

量多项式空间中也是可逆的。这样，上述推论对多重固有值也是正确的。

E. Poincaré 定理的证明

◀设原方程形为 $\dot{x}=Ax+v_r(x)+\cdots$，v_r 为 $r(r\geqslant 2)$ 次项。

我们来解同调方程（利用 § 22 D 推论）。今作变换 $x=y+h_r(y)$。

于是原方程成为 $\dot{y}=Ay+\omega_{r+1}(y)+\cdots$（利用 § 22 C 的引理）。这样我们消去了原方程右方的 r 次项。

依次消去 2，3，…次项，我们可作出变换的序列。这些变换的积在形式幂级数类中是"恒定"的，这里"恒定"就是指任意固定次数的项经过一定步数的变换后就不再变了。这些变换的极限把形式方程变为 $\dot{y}=Ay$。▶

注 1 虽然没有证明级数的收敛性。在非共振情况下可以用收敛的变换把摄动项的次数变得任意高：我们已经证明对任意的 N，原方程可以用真正的(甚至用多项式)变换变为 $\dot{y}=Ay+o(y^N)$。

注 2 若摄动项 $v=v_r+v_{r+1}+\cdots$ 的阶数为 r，在解出同调方程 $L_Ah=v$ 后，可用变换 $x=y+h$ 把方程的摄动项阶数变为 $2r-1$，这一事实与重复使用这个程序所得逼近的超收敛性有关(见 § 12)。

注 3 Poincaré 定理的证明即在多重固有值的情况下也有效(见 § 22 D 末尾)，但固有值应是非共振的。

注 4 若原方程是实的但固有值非实，则可选取复共轭向量为固有基底。这时可以把 Poincaré 定理中的变换取为实的，即是变复共轭向量为复共轭向量。

§ 23. 共 振 情 况

在共振情况，Poincaré-Dulac 定理断言，方程中所有非共振

项均可用形式变量变换消去。

A. 共振单项式

设 A 的全组固有值 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 是共振的。令 e_s 是固有基底的向量，$(x_1,\cdots,x_n)$ 是基底 $(e_1,\cdots,e_n)$ 下的坐标，$x^m=x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}$ 是坐标 x_i 的单项式。

定义 若 $\lambda_s=(m,\lambda)$，$|m|\geqslant 2$，则称向量单项式 $x^m e_s$ 为*共振的*。

例 对于共振 $\lambda_2=2\lambda_1$ 唯一的共振单项式是 $x_1^2e_2$。对于共振 $\lambda_1+\lambda_2=0$，所有单项式 $(x_1x_2)^k x_s e_s$ 都是共振的。

B. Poincaré-Dulac 定理

我们考虑由形式幂级数 $v(x)=Ax+\cdots$ 给出的微分方程

$$\dot{x}=Ax+\cdots.$$

定理 上述方程可用形式变量变换 $x=y+\cdots$ 化为典则形式

$$\dot{y}=Ay+w(y),$$

其中级数 $w(y)$ 的所有单项式都是共振的。

◀我们从消去级数 $v(x)$ 的非线性项开始。经过几步以后，我们就会遇到不可解的同调方程

$$L_A h=v,$$

其中 h 是 r 次齐性向量多项式，r 是共振阶数。这时不能用适当的变换来消去摄动项 v 的所有 r 次项。我们改而只求消去一切可以消去的项。换言之，将 v 和 h 写为向量单项式的和

$$v=\Sigma v_{m,s}x^m e_s,\quad h=\Sigma h_{m,s}x^m e_s,$$

并在 $(m,\lambda)-\lambda_s\neq 0$ 时，设

$$h_{m,s}=\frac{v_{m,s}}{(m,\lambda)-\lambda_s},$$

这样，我们定义了场 h。

作证明 Poincaré 定理时通常所用的变换 $x=y+h(y)$。这

时原方程中所有 r 阶的项除共振项外均已消去，而后者则不改变。这时方程成为

$$\dot{y}=Ay+w_r(y)+\cdots,$$

$w_r(y)$ 是共振项。

以下的步骤同样进行。余下的共振项 w_r 并不影响要求其解的同调方程，且以后的变换都不改变。事实上，若作变换 $y=z+g_s(z)$，则方程

$$\dot{y}=Ay+w_2(y)+\cdots+w_s(y)+\cdots,$$

变为

$$\dot{z}=Az+w_2(z)+\cdots+w_{s-1}(z)$$
$$+[w_s(z)-(L_Ag_s)(z)]+\cdots;$$

w_2 与 g_s 的 Poisson 括弧次数为 $s+1$。

因此，所有的 s 次非共振项都可通过选 g_s 消去，证明可以如非共振情况一样完成。▶

C. 例子

实际上，通常用 Poincaré-Dulac 定理来分出阶数不高的共振项，并将摄动项推到某一固定阶数，即将方程用真正的变换（甚至是多项式）而不是形式变换化为

$$\dot{x}=Ax+w(x)+0(|x|^N),$$

$w(x)$ 是共振单项式所成的多项式。

例 1 考虑平面上具有结点型奇点且有共振 $\lambda_1=2\lambda_2$ 的向量场。Poincaré-Dulac 定理使得可以（形式地）把方程化为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\lambda_1x_1+cx_2^2,\\ \dot{x}_2=\lambda_2x_2.\end{cases}$$

这时标准形式是多项式的，因为共振项只有有限多个（总共1个）。

例 2 考虑平面 $\mathbf{R}^2$ 上的向量场，它具有纯虚固有值 $\lambda_{1,2}=\pm i\omega$ 的奇点（按线性近似是中心点）。

化到固有基底。固有向量可以取为复共轭的。$\mathbf{C}^2$ 中以复共轭向量为基底的坐标时常记作 $z,\bar{z}$（这些数只在实平面 $\mathbf{R}^2\subset\mathbf{C}^2$ 上才确实是复共轭的）。

$\mathbf{R}^2$ 上的微分方程在 $\mathbf{C}^2$ 上给出如下的方程：

$$\dot{z} = \lambda z + \cdots, \quad \dot{\bar{z}} = \bar{\lambda}\bar{z} + \overline{\cdots}$$

（"$\cdots$"表示 z 和 $\bar{z}$ 的幂级数）。因为后一方程可从前一个方程用共轭得出，所以也可以不写出它。

有共振 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ 存在。由 Poincaré-Dulac 定理，此方程可用实的变量代换（见 § 22 E 的注 4）化为

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + c\xi|\xi|^2 + O(|\xi|^5).$$

从而 $r^2 = |\xi|^2$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的光滑实值函数。对于 r^2 有

$$(r^2)^\cdot = \dot{\xi}\bar{\xi} + \xi\dot{\bar{\xi}} = (2\mathrm{Re}\,c)r^4 + O(r^6),$$

如果 $\mathrm{Re}\,c<0$（或 >0），则平衡位置是稳定的（或不稳定的）。

这样，Poincaré 方法的前几步还给出了在线性近似下为中性奇点的稳定性问题的解法。在这里，这个程序是否可以继续做下去，以及整个过程在整体上是否收敛都是完全不重要的，重要的只是在于"非线性减量"的量 $\mathrm{Re}\,c$ 必须非零。

注 Lie 代数理论中的一个一般的定理是 Poincaré 定理的推广——这就是所谓的 E. Cartan 的"复本"（replica）定理，Cartan 的定理也是 Jordan 标准型定理的推广。

考虑一有限维 Lie 代数。令 u 为其元素。与此元素的交换子定义这个 Lie 代数的线性空间中的一个线性算子 $v \mapsto [u, v]$。如果这个交换子是可对角化的（即有固有基底的），元素 u 就称为**半单纯的**，如果这个算子是幂零的（即此算子的所有固有值均为 0），则称此元素 u 是**幂零的**。

分解定理指出，此代数的每个元都可以（唯一地）分解为一个半单纯元素 S 与一个幂零元素 N 的和，而且 N 与 S 可交换：

$$u = S + N, \quad SN = NS.$$

元素 S 和 N 就称为 u 的"**复本**"（replica）。

（在 Jordan 标准形理论中，S 是一个具有对角矩阵的算子，N 是幂零 Jordan 方块之和）。

在以 0 为奇点的向量场的节（jet）的 Lie 代数中，半单纯场就是那些线性的、而且可在适当坐标系下表为对角矩阵的场。幂零场由幂零的线性部分以及高阶项组成。S 和 N 可交换表示场的非线性部分在上述坐标系下只含有共振项。

把一般的复本定理应用到向量场在 0 点的节的有限维 Lie 代数上就可以导出 Poincaré-Dulac 定理。

§ 24. Poincaré 域和 Siegel 域

在研究上节所作的 Poincaré 级数的收敛性如何依赖于复变量平面上固有值的分布时，有两种情况本质不同。

A. 共振平面

考虑一切可能的固有值组所成的复 n 维空间

$$C^n = \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\}.$$

定义 由整系数方程给出的 C^n 中的超平面

$$\lambda_s = (m, \lambda), \quad m_k \geqslant 0, \quad \Sigma m_k \geqslant 2,$$

称为*共振平面*。

改变整数分量向量 m 与编号 s，可得可数多个共振平面。我们要研究整个共振平面集合怎样位于固有值空间 C^n 中。结果是，在 C^n 的一部分中，共振平面是离散的，而在另一部分中则处处稠密。

定义 一组固有值 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 称为属于 Poincaré *域*，如果 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 作为单复变量平面上的 n 个点，其凸包不包含零点。如果零点位于这 n 点的凸包以内，我们就称为 λ 属于 Siegel *域*。

注 当 $n > 2$ 时，Poincaré 域和 Siegel 域都是开的，且由锥面分开。$n = 2$ 时，Siegel 域在 C^2 中有实余维数 1。

B. Poincaré 域中的共振

今设固有值组 λ 属于 Poincaré 域。

定理 1 Poincaré 域的每一点都满足最多有限个共振关系 $\lambda_s = (m, \lambda)$，$|m| \geqslant 2$，$m_s \geqslant 0$，且有邻域不与其它共振平面相交。

换句话说，共振平面在 Poincaré 域中离散。

◀按定义，在复数平面上存在一条实的直线，它把固有值组与零点分开。考虑这些固有值在此直线指向零点的法线上的投影。

所有这些投影不小于分离直线到零点的距离。

另一方面,共振关系的系数 m_i 是非负的，所以对于充分大的 m，(m, λ) 在法线上的投影将大于固有值在分离直线的法线上的最大投影。▶

定理 2 若场 v 在 O 点线性部分的固有值在 Poincaré 域中,则即使在共振情况下,这个场也可以用形式变量变换化为多项式标准形式。

◀按定理 1,共振项为数有限,所以定理 2 可由定理 1 和 Poincaré-Dulac 定理得出。▶

注 在 Poincaré 域中,只有当一个具有非负分量的固有值可以用其余固有值(但不包括这个固有值本身)来表示时，才可能有共振，即当由 $\lambda_s=(m, \lambda)$ 可得出 $m_s=0$ 时才可能。事实上，若 $m_s>0$，则 $0=(m, \lambda)-\lambda_s$ 在分离直线的法线上有正投影.

C. Siegel 域中的共振

现在我们设固有值组在 Siegel 域中。

定理 3 共振平面在 Siegel 域中处处稠密。

◀点 0 或者位于以 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 为顶点的三角形内，或者在线段 (λ_1, λ_2) 内.在第一个情况下,考虑以 0 为顶点，而由 λ_1, λ_2 的非负系数线性组合组成的角。

λ_3 的负倍数位于此角内。把这个角分成以 λ_1, λ_2 的整系数线性组合为顶点所成的平行四边形。令 d 为这样的平行四边形的直径。对任意自然数 N，数 $-N\lambda_3$ 位于某一个平行四边形内。所以它离某一个顶点的距离不大于 d，即

$$|N\lambda_3+m_1\lambda_1+m_2\lambda_2|\leqslant d.$$

由此不等式可知,我们的点 λ 到共振平面 $\lambda_3=m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+(N+1)\lambda_3$ 的距离不超过 d/N。所以若零在三角形内，则定理得证

当 0 在线段 (λ_1, λ_2) 内时，存在任意大的整数 p_1 与 p_2 使 $|p_1\lambda_1+p_2\lambda_2|\leqslant d$。

这就给出了离 λ 距离小于 $d/|p|$ 的共振平面。▶

定义 点 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbf{C}^n$ 称为 (C,ν) 型点，若对任意 s 及具有非负分量 m_i 而 $\Sigma m_i=|m|\geqslant 2$ 的整数向量 m，有

$$|\lambda_s-(m,\lambda)|\geqslant C/|m|^\nu.$$

定理 4 对任意 C 均不是 (C,ν) 型的点集，当 $\nu>(n-2)/2$ 时，测度为 0。

◀固定 $\mathbf{C}^n$ 中的一个球，并估计其中非 (C,ν) 点集的测度。定义中的不等式确定了共振平面的一个宽度不超过 $C_1C/|m|^{\nu+1}$ 的邻域，所以这个邻域在球内的部分测度不超过 $C_2C^2/|m|^{2\nu+2}$。对于 $|m|$ 值一定的 m 求和，所得不超过 $|m|^{n-1}C_3C^2/|m|^{2\nu+2}$。再对 $|m|$ 求和即得，当 $\nu>(n-2)/2$ 时，$C_4(\nu)C^2<\infty$。所以球中非 (C,ν) 点集可被测度任意小的球覆盖。▶

在实的情况，定理 4 中需要加上条件 $\nu>n-1$。

D. Poincaré 定理和 Siegel 定理

现设向量场由收敛级数而不是形式级数给出，即考虑具有全纯右方的微分方程。

Poincaré 定理 若全纯向量场在奇点的线性部分的固有值属于 Poincaré 域而且是非共振的，则场在奇点附近双全纯地等价于其线性部分。

换言之，若固有值属于 Poincaré 域，则上节所作的 Poincaré 级数收敛。

Siegel 定理 若全纯向量场在奇点的线性部分的固有值组成 (C,ν) 型向量，则场在奇点附近双全纯地等价于其线性部分。

换言之，Poincaré 级数对向量场在奇点的几乎所有（在测度论意义下）线性部分都收敛。

注 Poincaré 域中的所有非共振向量都是对于某个 $C>0$ 的 (C,ν) 型向量。与此相反，在 Siegel 域中，以下几种向量的集合都是处处稠密的：(C,ν) 型向量，共振向量以及非共振但对任意 C 和 ν 均非 (C,ν) 型的向量。

最后一类固有值组虽然是不可通约的，但它们非常近于可通约的，Poincaré 级数可能发散，所以这场可能形式地等价于(但却不双全纯地等价于)其线性部分。

对 § 28 中关于映射的类似定理之证明稍加简化，即可得出 Poincaré 定理和 Siegel 定理的证明。

E. Poincaré-Dulac 定理

现在考虑共振的固有值的情况。

定理 若一个全纯向量场在一奇点的线性部分固有值属于 Poincaré 域，则该场在奇点附近双全纯地等价于一个多项式场，其中所有具有次数大于 1 的系数的向量单项式都是共振的。

换言之，若固有值在 Poincaré 域中，则 Poincaré 级数即使在共振情况也是收敛的。

注. 与此相反，若固有值在 Siegel 域中，则在共振时，可以形式化为标准形式的级数通常是发散的。这种情况的第一个例子早在 Euler 时代已经给出(见 L. Euler [1] p.601)。

在 Euler 的例子中

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2,\\ \dot{y}=y-x,\end{cases}$$

原点是鞍点——结点型奇点。尽管右方是解析的，将半平面 $x<0$ 分成两半的分离曲线并不解析，而只是无穷可微的：$y=\Sigma(k-1)!x^k$。

А. Д. Брюно 作出过 Poincaré 级数发散的许多例子（见 Брюно [1]；其中也证明了 Siegel 定理范围之外的某些情况下级数的收敛性)。

F. 实的和非解析的情况

Poincaré 定理和 Poincaré-Dulac 定理都可以移到实解析和无穷可微向量场的情况，甚至可移到具有有限阶的(但充分大的)光滑性的场的情况。

在 Siegel 情况下，这种推广也是可能的（例如见 S. Sternberg [1]）。

然而应该指出，这些定理可以应用的情况在拓扑上是平凡的。事实上，对于实的场只有固有值全在左半平面或全在右半平面时，才有 Poincaré 情况。这时（不论共振与否），方程组在实空间的不动点附近拓扑等价于标准方程组 $\dot{x}=-x$（或 $\dot{x}=+x$）。当 $t\to+\infty$ 时，所有相曲线都进入渐近稳定平衡位置（或当 $t\to-\infty$ 时，离开平衡位置）。

实域中的 Siegel 定理的情况，可应用 Grobman-Hartman 定理（方程组拓扑等价于标准鞍点）。事实上，若线性部分的非零固有值中至少有一个位于虚轴上，则复共轭固有值也在虚轴上；这一对固有值 $\lambda_{1,2}=\pm i\omega$ 导致共振 $\lambda_1+\lambda_2=0$。0 固有值总是共振的。所以在实情况，Siegel 定理只对虚轴上没有固有值的方程组适用，而这种方程组局部拓扑等价于其线性部分（Grobman-Hartman 定理，§ 13）。

与 Poincaré 和 Siegel 定理相反，Poincaré 方法可应用于虚轴上有固有值这种很复杂的拓扑上，因为这个方法可以用于使 Taylor 级数的有限项标准化。然后即可证明高阶项不改变定性图象。

§ 23 C 中分析过最简单的这类例子。这个方法在分枝理论（第六章）中特别有用。

§ 25. 映射在不动点附近的标准形式

对一个把某空间映为自身的映射，在其不动点附近选择一个适当的坐标系，这平行于在平衡位置附近微分方程的标准形式理论。在本节中将要指出，标准形式理论在这个情况下是什么形式。

A. 共振．Poincaré 域和 Siegel 域

考虑由形式幂级数 $F(x)=Ax+\cdots$ 给出的形式映射 F：

$\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$. 令 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是线性算子 A 的固有值. 下面的关系式称为共振:

$$\lambda_s = \lambda^m, \text{ 其中 } \lambda^m = \lambda_1^{m_1}\cdots\lambda_n^{m_n}, \ m_k \geqslant 0, \ \Sigma m_k \geqslant 2.$$

例 当 $n=1$ 时, 1 的所有单位根和 0 都是共振固有值, 其余的则不是.

定义 若全组固有值之模全都是小于或大于 1, 则说这一组固有值属于 Poincaré 域.

所以, 若一映射 F 的线性部分的固有值属于 Poincaré 域, 则在原点附近或者它本身是压缩(若 $|\lambda|<1$), 或者它的逆是压缩(若 $|\lambda|>1$).

定义 Poincaré 域的余集称为 Siegel 域. 对 $n=1$, Siegel 域即是单位圆周 $|\lambda|=1$. 在固有值的空间 $\mathbf{C}^n$ 中, 共振方程 $\lambda_s = \lambda^m$ 定义了一个复超曲面, 它称为共振曲面. 在 Poincaré 域中共振曲面是离散的. 在 Siegel 域中共振与非共振点都是处处稠密的.

B. 形式线性化

首先考虑映射在不动点附近形式的标准形式问题.

定理 若映射 F 在不动点处的全组固有值是非共振的, 则映射 $x \longmapsto F(x)$ 可以用形式的变量变换 $x = \mathscr{H}(y) = y + \cdots$ 化为其线性部分:

$$F \cdot \mathscr{H} = \mathscr{H} \cdot A.$$

◀令 $\mathscr{H}(y) = y + h(y)$, h 是 $r \geqslant 2$ 次齐性向量多项式. 这时

$$\mathscr{H} \cdot A \cdot \mathscr{H}^{-1}(x) = Ax + [h(Ax) - Ah(x)] + \cdots,$$

"…"表示次数高于 r 的项. 方括号中的式子是 r 次齐性向量多项式. 这个多项式线性依赖于 h. 在齐性向量多项式空间中的线性算子

$$M_A: \ h(x) \longmapsto [h(Ax) - Ah(x)],$$

有固有值 $\lambda^m - \lambda_s$ 和固有向量 $h(x) = x^m e_s$ (在这里, e_k 记算子 A 的固有基底, $x^m = x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}$, x_k 是 $\{e_k\}$ 基底下的坐标, 这些

都和通常一样;为简单计,设 A 的所有固有值都是相异的)。

我们这样得到 h 的同调方程

$$M_A h = v,$$

为了解它就需要把 v 的系数除以 $\lambda^m - \lambda_s$。所以在这里共振条件形如 $\lambda_s = \lambda^m$。

证明的以下步骤和 § 22 中对微分方程的证明一样。▶

C. 收敛性问题

Poincaré 定理和 Siegel 定理也可以移到离散时间的情况,如下。

Poincaré 定理 如果一个全纯微分同胚在不动点处的所有固有值的模都小于 1(或都大于 1),而且没有共振,则它可以在不动点附近用双全纯的局部微分同胚化为其线性部分。

Siegel 定理 对于全纯微分同胚在不动点的几乎所有(在 Lebesgue 测度意义下)固有值全体,这个微分同胚均在不动点处双全纯等价于其线性部分。

具体地说,为使该微分同胚等价于其线性部分,只需要它的固有值满足不等式

$$|\lambda_s - \lambda^m| \geqslant C|m|^{-\nu},$$

它应对一切 $s=1,\cdots,n$ 和 m 成立,这里 $|m|=\Sigma m_k \geqslant 2$, $m_k \geqslant 0$。满足这个不等式的固有值组称为 (C, ν) 乘子型的固有值全组。若 $\nu > (n-1)/2$,则对任意 C,不属于 (C, ν) 乘子型的固有值全组之集是一个零测度集。

Poincaré 定理和 Siegel 定理的证明和微分方程情况几乎完全一样。虽然大约在 1940 年左右就知道 Siegel 定理了,它的证明似乎直到 70 年代末才发表。我们在 § 28 中将给出这个证明。

D 共振情况

每一个共振关系 $\lambda_s = \lambda^m$ 相应地有共振向量 $x^m e_s$(e_s 是固有基底向量,$x^m = x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}$, x_k 是固有基底下的坐标)。

Poincaré-Dulac 定理 形式映射 $x \longmapsto Ax + \cdots$，其中 A 为对角矩阵，可以用形式变换 $x = y + \cdots$，化为标准形式 $y \longmapsto Ay + w(y)$，其中级数 $w(y)$ 仅由共振单项式组成。若线性部分 A 的固有值的模全小于 1（或全大于 1），则全纯映射 $x \longmapsto Ax + \cdots$，可以用双全纯变换化为仅含共振项向多项式标准形式。

在共振情况下，常用 Poincaré 方法将映射在不动点处的 Taylor 级数的有限项化为标准形式。

例 考虑 C^1 到自身的映射，它具有不动点 O，且固有值 λ 为 1 的 n 次根。这种映射可以适当选择坐标系化为

$$x \mapsto \lambda x + cx^{n+1} + O(|x|^{2n+1}).$$

例如，若 $\lambda = -1$，则映射可以化为

$$x \mapsto -x + cx^2 + O(|x|^3).$$

这个公式可以用来研究实映射的不动点的稳定性。事实上，重复此映射两次（即映射平方），可得

$$x \mapsto x - 2cx^3 + O(|x|^4).$$

因此，若 $c > 0$，则此映射的不动点 O 是稳定的。

这样，Poincaré 方法的前几步可以用来研究在线性近似下为中立的不动点的稳定性。

§ 26. 周期系数方程的标准形式

把具有周期系数的方程化为更简单的形状，这也是 Poincaré 标准形式方法的一个变体。

A. 具有周期系数的线性方程的标准形式

考虑复相空间中的线性方程

$$\dot{x} = A(t)x,$$

这里复线性算子 $A(t): C^n \to C^n$ 对 t 以 2π 为周期。

将一解 $t = 0$ 时的初始值变为此解当 $t = 2\pi$ 时的值的线性算子 $M: C^n \to C^n$ 称为<u>单值化算子</u>（单值化算子不仅对线性方

程有定义，而且对任意具有周期系数的方程也有定义；在这个较广泛的情况下，单值化映射通常称为 Poincaré 回归映射或简称 Poincaré 映射)。

Floquet 定理 若单值化算子是对角算子而 $\mu_k = e^{2\pi\lambda_k}$ 为其固有值，则原来的具周期系数的线性方程可以用 2π 周期的线性变换 $x \longmapsto B(t)y$ 化为常系数方程

$$\dot{y} = Ay,$$

这里 A 是以 λ_k 为固有值的对角算子。

◀考虑一个线性算子，它变原方程某解在 $t=0$ 时的初始值为此的解在时刻 t 的值。记它为 $g^t: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$。用 $f^t: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ 记对于方程 $\dot{y} = Ay$ 的类似算子。这时 $g^0 = f^0 = E$，$g^{2\pi} = f^{2\pi} = M$ 为单值化算子(注意 A 的选择)。$B(t) = g^t(f^t)^{-1}$ 即所求变换。▶

注 Floquet 定理的证明只用到单值化算子可表为 $M = e^{2\pi A}$。所以周期的变量变换不仅可将具有对角单值化算子的复方程化为常系数方程，而且每一个单值化算子有对数的方程也是这样。

每一个非蜕化的复线性算子都有对数（只要用此算子的矩阵的 Jordan 形式即知)。

推论 1 每一个 2π 周期的复线性方程都可用一个 π 周期线性变量变换化为常系数方程。

实线性算子不一定恒有实对数，即使其行列式为正也是如此(单值化算子的行列式恒正)。事实上，例如考虑平面上的以 $(-1, -2)$ 为固有值的线性算子。若此算子是另一线性算子的指数，则后者的固有值是复的但并不共轭。所以上述实平面上的算子没有实对数。

另一方面，容易看到实算子的平方恒有实对数。这就导出了以下的

推论 2 每一个具 2π 周期系数的方程都可用一个 4π 周期的线性变量变换化为常系数方程。

应用复的化约比应用双倍周期的实的化约通常更为简单。

B 同调方程的推导

考虑常系数线性方程 $\dot{y}=Ay$. 对它作一个非线性坐标变换

$$x=y+h(y,t),$$

h 是对 t 以 2π 为周期系数的向量函数(或 y 的形式幂级数而其系数以 2π 为周期)。

引理 若 $h=O(|y|^r)$ (或者若级数 h 从不低于 r 次的项开始), $r\geqslant 2$, 则

$$\dot{x}=Ax+\left[\frac{\partial h}{\partial x}Ax-Ah+\frac{\partial h}{\partial t}\right]+\cdots,$$

"…"表示 x 的高于 r 次的项。

◀$\dot{x}=(E+h_y)A(x-h(x,t))+\cdots+\cdots$

$=Ax+[h_xAx-Ah(x,t)+h_t]+\cdots$. ▶

定义. 具有 2π 周期系数方程 $\dot{y}=Ay$ 的同调方程即是对 t 以 2π 为周期的向量场 h 的方程

$$L_Ah+h_t=v,$$

这里 v 是已知的 2π 周期向量场,而

$$(L_Ah)(x,t)=\frac{\partial h}{\partial x}Ax-Ah(x,t).$$

我们也将考虑 h 和 v 是系数对 t 有 2π 周期的形式幂级数的情况。

C 同调方程的解法

先令 v 和 h 为 Taylor-Fourier 级数

$$v(x,t)=\Sigma v_{m,k,s}x^me^{ikt}e_s,\ h(x,t)=\Sigma h_{m,k,s}x^me^{ikt}e_s.$$

同调方程的形式解由下式给出

$$h_{m,k,s}=\frac{v_{m,k,s}}{ik+(m,\lambda)-\lambda_s},$$

λ_j 是算子 A 的固有值。

共振条件为

$$\lambda_s = (m, \lambda) + ik,$$
$$m_j \geqslant 0,\ \Sigma m_j \geqslant 2,\ -\infty < k < +\infty,\ 1 \leqslant s \leqslant n.$$

若对已给的 m，s 不发生共振，则 Fourier 级数 $\Sigma h_{m,k,s} e^{ikt}$ 及其对 t 的导数收敛。故在无共振时，同调方程在具有 t 的 2π 周期系数的齐性多项式类中可解，从而在具有对 t 的 2π 周期系数的形式幂级数类中可解。

若有共振，则当 v 的 Taylor-Fourier 级数不包含共振项时，同调方程仍可解，这就是说，若当共振条件 $\lambda_s = ik + (m, \lambda)$ 成立时，$v_{m,k,s}$ 为 0，同调方程亦可解。

D. 形式标准形式

象通常一样作，在非共振情况下可将具有 2π 周期形式系数的方程化为常系数方程 $\dot{y} = Ay$. 这里的变换是 y 的形式幂级数，其系数对 t 以 2π 为周期。

在共振情况下，则可化为以下方程

$$\dot{y} = Ay + w(y, t),$$

w 是 y 的形式幂级数，其系数对 t 以 2π 为周期，而且只含共振项(注意，对 y 有任意固定阶的共振项只含有限多个 Fourier 调和素，因为共振条件 $\lambda_s = (m, \lambda) + ik$ 唯一地决定了 k)。

实际上通常只将低阶项正则化。

例 考虑 2π 周期系数方程。设相空间维数 $n = 2$，且单值化算子的两个固有值都是复的，其模为 1。

在适当的坐标系下，变换的线性化方程为

$$\dot{z} = i\omega z.$$

($\bar{z}$ 的方程是以上方程的共轭，故略去)。固有值为 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$。$z$ 方程的共振项由下式决定：

$$ik + (m_1 - m_2 - 1)i\omega = 0.$$

若实数 ω 是无理的，则 $k = 0$，$m_1 = m_2 + 1$. 从而方程可化为不依赖于时间的形式的标准形式：

$$\dot{z} = i\omega z + c_1 z|z|^2 + c_2 z|z|^4 + \cdots.$$

用真正的(即非形式的)变量变换可将方程化为例如以下形式

$$\dot z = i\omega z + c_1 z|z|^2 + \cdots,$$

这里对 t 的 2π 周期的依赖性只在用"…"表示的 z 的 5 次以上的项中保存。

注意，这时 Poincaré 方法的每一步都归结为对 t 与 $\arg z$ 求平均，这样得到的方程在对 t 平移与对 z 旋转下不变。

E. 可通约情况

现设前例中的 ω 是有理数 $\omega = p/q$. 这时由共振项的方程可得

$$k = pr, \quad m_1 = m_2 + 1 - qr.$$

为了研究标准形式，考虑时间轴的 q 重覆盖更方便。注意，方程的线性部分的积分曲线成为 (p, q) 型 Seifert 叶层构造(见 §21)。在 q 重覆盖空间上，积分曲线成为一个平凡的叶层构造，从而可在其上以引入直积坐标。纤维上的坐标记作 $t(\mathrm{mod}\,2\pi q)$。底空间上的坐标 ζ 由下式决定：

$$z = e^{i\omega t}\zeta.$$

采用这样的记号，方程的线性部分成为 $\dot\zeta = 0$. 标准形式是一个与 t 无关的形式级数

$$\dot\zeta = \Sigma w_{k,l}\zeta^k\bar\zeta^l,$$

其中 $k - l \equiv 1 \bmod q$.

换言之，在 q 重覆盖的底空间上可得(形式的)方程，它对旋转角度 π/q 为不变。

如果不作完全的形式化约而只限于级数前几项的规则化，则得 ζ 的方程如下，其中有对 t 为周期 $2\pi q$ 的 $q+1$ 阶余项：

$$\dot\zeta = \zeta a(|\zeta|^2) + b\bar\zeta^{q+1} + \cdots.$$

这时，Poincaré 级数的每一项都归结为沿着 Seifert 叶层构造的平均化。所以这样得到的方程对 t 的平移和对 ζ 旋转 $2\pi/q$ 倍数的角都不变。

这样得到的方程将在第六章中研究。

F. 收敛性的讨论

具有周期系数的方程 $\dot x = Ax + \cdots$ 将由以下条件决定：线性

化方程的固有值全在左半平面 $\mathrm{Re}\lambda<0$ 内(或全在右半平面内).

在这个域中：(1) 共振平面族 $\{\lambda:\lambda_s=(m,\lambda)+ih\}$ 是离散的；(2) 标准形式可能含有无穷多项；(3) Poincaré 级数可能发散。

但是对算子 A 的几乎所有(在 Lebesgue 测度意义下)固有值 λ 之组，对 t 为周期 2π 的全纯微分方程 $\dot{x}=Ax+\cdots$ 在零解附近可以用双全纯的对 t 为周期 2π 的变换化为自治标准形式 $\dot{x}=Ax$ (周期系数情况的 Siegel 定理).

◀证明和通常的一样，见 §28。▶

G. 闭相曲线的邻域

考虑具有周期解从而有闭相曲线的自治微分方程 $\dot{x}=v(x)$. 所有以上对具有周期系数方程的零解邻域所讨论的，都可以直接移到这里。

实际上，在闭相曲线邻域中可以这样选择坐标使得由向量场 v 所给的方向场成为具有周期系数方程的方向场，而且相空间维数减少 1 (沿相曲线的坐标称为时间)。

注 若相空间为一流形，则闭相曲线的邻域可能不微分同胚于圆周和横截的圆盘的直积。

例 设相空间为 Möbius 带而相曲线是它的轴圆周.

一般说来，流形上的闭路的邻域不是直积，当且仅当此流形是不可定向而且闭路是破坏定向的路径. 在这时必须用此闭路的二叶覆盖才能变为周期系数方程.

H 与 Poincaré 映射的联系

周期系数方程的标准形式理论，也可以从它们的 Poincaré 映射的标准形式 (即微分同胚在不动点附近的标准形式)理论导出. 反之，在不动点附近研究微分同胚也可以化为研究一个周期系数方程，而此微分同胚就是它的 Poincaré 映射。

在有限甚至无限实光滑性的情况，由一已知 Poincaré 映射作

出周期系数微分方程并无大的困难[1]。解析或全纯的情况就较为复杂。这个问题等价于圆环上的解析(全纯)纤维丛在拓扑平凡性假设下的解析(全纯)平凡性问题。虽然本质上说，从层的理论和Stein 流形的理论可以得到肯定的回答，但是就作者所知，证明尚未发表(作者感谢 В. П. Паламодов 和 Ю. С. Ильяшенко 解释这一点)。我们不讨论这个理论，尤其是因为研究微分方程和微分同胚所需要的结果不一定可以互相导出，而只是可用同样的证法独立地得出。

I. 条件周期系数的情况

Poincaré 方法也可以直接推广到条件周期系数的情况。这里说的是方程

$$\dot{x} = Ax + v(x, \varphi),$$
$$\dot{\varphi} = \omega,$$

其中 φ 是 r 维环面上的点，ω 是常向量，$A: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ 是不依赖于 φ 的线性算子，v 是一向量场，它在点 $x = 0$ 处的线性部分为 0.

对频率向量 ω 的分量要加上通常的不可通约性条件。这时，共振条件形状如下：

$$\lambda_s = i(k, \omega) + (m, \lambda),$$

k 为 r 维空间的一切整点，m 适合通常的条件 $m_s \geqslant 0$，$\Sigma m_s \geqslant 2$.

设函数 v 对 x 和 φ 是解析(全纯)的，且对 $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_r)$ 为周期 2π。可证原方程组可以用解析(全纯)的对 φ 有周期 2π 的变换 $x = y + h(y, \varphi)$，化为

$$\dot{y} = Ay, \quad \dot{\varphi} = \omega.$$

(见 Э. Г. Белага [1])。

这个理论的缺点在于具有条件周期系数的线性方程理论的不完善。对于周期系数方程，我们可以在适当的周期线性坐标变换

---

1) 把一个已知的映射归入一个自治方程的相流，一般地说是不可能的 (不能微分等价于一个旋转的具有无理旋转数的圆周的微分同胚即是一例。见 § 11)。

下，使它的线性部分系数变为常数；但对于条件周期系数方程，A 不依赖于 φ——这一假设是本质的限制。

J. 具有条件周期系数的线性方程的可约性问题[1]

所谓条件周期系数的线性方程即

$$\dot{x}=A(\varphi)x,\quad \dot{\varphi}=\omega,$$

其中 $x\in\mathbf{C}^n$，$\varphi\in T^r$，ω 是具有整系数不相关的分量的向量，$A(\varphi)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的线性算子。

因此，方程由（A,ω）给出，A 是环面上的算子值（亦即矩阵值)的光滑函数，ω 是环面上的向量。

定义 具有条件周期系数的线性方程称为*可约的*，如果存在环面上的(光滑）算子值函数 B，使得变换 $x=B(\varphi)y$ 能把原方程化为常系数方程 $\dot{y}=Cy$.

可约性问题就是：*是否通有的线性方程为可约*。

甚至还不知道，*是否在*（A,ω）*所成的解析函数空间中存在一个不含有可约系的区域*。

在研究自治方程载有条件周期运动不变环面的邻域时，自然发生线性(或非线性)的具有条件周期系数方程的可约性问题。这个环面通常是用逐步逼近法解决的，在通有情况下，一般地可以修改这种逼近，使得同时既得出不变环面，也把沿环面的变分方程化为标准形式，这样回避了可约性这个未解决的问题（实质上是对某个“未摄动”问题应用了可约性)。

§ 27. 椭圆曲线附近的标准形式

Poincaré 关于微分方程在奇点附近标准形式理论和复曲面上椭圆曲线邻域的标准形式理论非常类似。本节中简要地考察这个理论，它是微分方程在解析几何上的应用、而它本身又在微分方程理论中有应用。

1）英译本没有这一段。——译者注

A. 椭圆曲线

椭圆曲线定义就是同胚于环面的一维复流形。

例 考虑复平面 $\mathbf{C}$ 和两个复数 (ω_1, ω_2)，它们的比不是实的。把 $\mathbf{C}$ 中每一点 φ 与由它平移 ω_1 和 ω_2 所得的点等同起来(从而也与所有的点 $\varphi + k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ 等同起来，k_1, k_2 是整数)。这样等同以后，$\mathbf{C}$ 变成椭圆曲线

$$\Gamma = \mathbf{C}/\omega_1\mathbf{Z} + \omega_2\mathbf{Z}.$$

所以可以把椭圆曲线看作是以 (ω_1, ω_2) 为两邻边的平行四边形，并将对边上的对应点视为相同点。

可以证明，所有椭圆曲线(除了相差一个双全纯等价)都可从这例子的作法得出。这个事实决非明显的定理。

例如考虑带形 $0 \leqslant \mathrm{Im}\varphi \leqslant \tau$，并将点 $\varphi, \varphi + 2\pi$ 粘起来，把边界上的点 φ 与点 $\varphi + i\tau + \sigma + 0.5\sin\varphi$ 视为同一点，φ 为实数。这样得到的流形可以双全纯地映到商流形 $\mathbf{C}/\omega_1\mathbf{Z} + \omega_2\mathbf{Z}$ 上去；然而证明并不容易。很可能当 $\tau \to 0$ 时，ω_1/ω_2 在通常的 Diophantine 条件下趋于旋转数。

数 ω_1 与 ω_2 称为曲线的周期。若将两个周期都乘以同一复数，将得到新的周期并给出双全纯等价于原曲线的椭圆曲线。所以恒可选择周期，使 $\omega_1 = 2\pi$。

这时，用 ω 记另一周期。恒可设 $\mathrm{Im}\omega > 0$。对于不同的 ω 一般地有双全纯不等价的椭圆曲线(更准确地说，如果不能用乘以一个复数使两曲线的格点 $\omega_1\mathbf{Z} + \omega_2\mathbf{Z}$ 重合，则它们不双全纯等价)。

问题[1] 证明位能为 3 或 4 次多项式的一维 Newton 方程的相曲线(若在椭圆域中考虑)是椭圆曲线。

提示 相曲线上的运动时间 t 起覆盖椭圆曲线的平面上坐标 φ 的作用，时间由关系式 $dt = \frac{dx}{y}$ 确定(时间也称为第一类椭圆积分)。

问题 令位能为具有两个极小值的 4 次多项式。证明具有相同总能量的振动(不一定是小振动)在两个势阱中的周期相同。

提示 在环面任二个子午线上的第一类积分值相同。

问题 设位能是具有局部极大和极小各一个的 3 次多项式。证明势阱中的振动周期等于具有相同总能量但由无穷到无穷的非紧相曲线上运动

---

1) 本题和以下各题都要用到 Riemann 曲面拓扑学的初等知识，这些可以在任何一本单复变函数论教本中找到。

的周期。

注　选择位能为 3 或 4 次多项式，可得任意椭圆曲线。所以由上面几个问题可知，椭圆曲线都是代数流形。

B　椭圆曲线上的最简单的纤维丛

含有椭圆曲线的最简单曲面是椭圆曲线与复直线的直积。正如在圆周上除了圆周与直线的直积外还有其它以直线为纤维的纤维丛（Möbius 带），在椭圆曲线上除直积以外也有以 $\mathbf{C}$ 为纤维的纤维丛。

考虑两个复变量平面之纤维化而以复直线为纤维。我们称此纤维的铅直直线。

用 (r, φ) 记 $\mathbf{C}^2$ 的坐标，且坐标 r 为铅直的，φ 为水平的。此纤维丛 $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ 使每一点 (r, φ) 对应于水平复直线上的点 φ。

令 Γ 为由水平直线覆盖的椭圆曲线。将水平 φ 轴上相差为周期 (ω_1, ω_2) 整数倍的点视为相同点，即得曲线 Γ。

将平面 $\mathbf{C}^2$ 上水平投影相差周期整数倍的铅直直线等同起来，即得椭圆曲线 Γ 上的纤维丛。但将铅直直线等同也能以不同方式来作(正如将由矩形得到的圆周上的纤维粘起来，既可得柱面，又可得 Möbius 带，视如何粘结铅直直线而定)。

最简单的粘法是将点 (r, φ) 与 $(r, \varphi + \omega_1)$，$(r, \varphi + \omega_2)$ 等同。这样得到直积。稍为复杂一点的情况是：在粘结的同时，把铅直直线扭转。

例　令 λ 为非 0 复数而 Γ 是周期为 $(2\pi, \omega)$ 的椭圆曲线。在平面 $\mathbf{C}^2$ 上(坐标为 (r, φ))，以下各点等同：

$$(r, \varphi),\ (r, \omega + 2\pi),\ (\lambda r, \varphi + \omega).$$

这样 $\mathbf{C}^2$ 变为光滑复曲面 Σ，纤维化 $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$，$(r, \varphi) \mapsto \varphi$ 变为纤维化 $\Sigma \to \Gamma$，底空间的椭圆曲线 Γ，纤维为 $\mathbf{C}$。方程 $r = 0$ 给出 Γ 在 Σ 中的嵌人。

可以这样来想像曲面 Γ (在 λ 为实时)。考虑实三维空间，水平平面是 $\{\omega \in \mathbf{C}\}$、纤维是铅直直线。考虑带形 $0 \leqslant \mathrm{Im}\varphi \leqslant \mathrm{Im}\omega$。把包围它的两铅直平面粘起来，并使铅直平面 $\mathrm{Im}\varphi = 0$ 上的点 (r, φ) 与平面 $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}\omega$ 上的点 $(\lambda r, \varphi + \omega)$ 重合。此外，也把仅 φ 坐标相差 2π 的点粘起来。这样可得

椭圆曲线 Γ 上的纤维丛，纤维为直线.

为了设想曲面 Σ，只需把实铅直直线换为复的即可.

从拓扑观点看，所得纤维丛是直积. 但是从全纯观点来看，这个纤维丛一般是非平凡的.

C. 平凡与非平凡的纤维化

定理 令 $\lambda\neq e^{ik\omega}$, $k\in\mathbf{Z}$. 这时椭圆曲线 Γ 在上述曲面 Σ 中的任一邻域均不双全纯地映到此曲线 Γ 在直积中的邻域内.

◀可以在直积中将 Γ 变形：对任意 ε，方程 $r=\varepsilon$ 定义了直积中的一椭圆曲线. 令 Γ_1 为纤维空间 Σ 中接近于 Σ 的零截口 Γ(Γ 的方程为 $r=0$). 这时 Γ_1 由方程 $r=f(\varphi)$ 给出，而 $f(\varphi+2\pi)=f(\varphi)$, $f(\varphi+\omega)=\lambda f(\varphi)$. 将 f 展为 Fourier 级数 $f=\Sigma f_k e^{ik\varphi}$, 可得 $f_k e^{ik\omega}=\lambda f_k$. 所以 $f_k=0$ 而 Γ_1 与 Γ 重合. 这样此纤维丛上的椭圆曲线当 $\lambda\neq e^{ik\omega}$ 时不能形变. ▶

问题. 证明当 $\lambda=e^{ik\omega}$ 时，纤维丛 $\Sigma\to\Gamma$ 是直积(即全纯平凡).

问题 证明由复数 λ_1, λ_2 给出的纤维丛 $\Sigma_1\to\Gamma$ 和 $\Sigma_2\to\Gamma$, 当且仅当对某个整数 k 有 $\lambda_1=\lambda_2 e^{ik\omega}$ 时，为全纯等价.

注 在固定的椭圆曲线 Γ 上的，上述形状纤维丛的全纯等价类构成群(遍乘以数 λ 为乘法).

由以上各问题的结果可知，这个群可以自然地视为等同于复数的乘法群对于形如 $e^{ik\omega}$ 的数所成的子群之商群. 商群 $\mathbf{C}^k/\{e^{ik\omega}\}$ 本身可以双全纯地映到原来的椭圆曲线上. 这个群也称为 Γ 的 Picard **群**或 Jacobi **流形**(这些概念不仅对椭圆曲线，而且对一般代数流形都有定义. 在一般情况下，它并不是原来的流形).

问题 考虑椭圆曲线上由下式给出的纤维丛：

$$(r,\varphi)\sim(\lambda_1 r,\varphi+\omega_1)\sim(\lambda_2 r,\varphi+\omega_2).$$

证明这个纤维丛双全纯地等价于 $\omega_1=2\pi$, $\lambda=1$ 的纤维丛.

注 可以证明，椭圆曲线上的所有拓扑平凡的一维向量丛双全纯等价于上述纤维丛 $\Sigma\to\Gamma$.

D. 椭圆曲线上的拓扑非平凡纤维丛

从拓扑上说，上述所有纤维丛都是平凡的(即同胚于直积)。能够区分拓扑不等价的纤维丛的不变量是零截口的自交指标。

令 M_1, M_2 是可定向实光滑流形 M 的光滑可定向紧子流形(即无边流形)。设流形 M 的维数等于 M_1, M_2 维数之和，M_1 和 M_2 横截相交(即在每一个交点，两个子流形的切空间之和包含流形 M 的切空间)。

M_1 和 M_2 的**相交指标**就是它们的计及定向的交点数（若 M_1 的正定向标架后面再接以 M_2 的正定向标架即可给出 M 的正定向标架，就说交点有正号)。

令 M_1 是可定向光滑紧子流形，它的维数是 M 的一半。M_1 在 M 中的**自交指标**定义为 M_1 以及由 M_1 经过小的变形而得的，而且与 M_1 横截相交的子流形 M_2 的相交指标。例如环面子午线的自交指标为 0，因为相邻子午线是不相交的。

可以证明，M_1 在 M 中的自交指标与 M_2 的选择方法无关，只要 M_2 是由 M_1 经小的变形而得即可。

问题 求球面 S^2 在其切丛中的自交指标。

答 +2。一般地说，流形在其切丛中的自交指标等于其 Euler 示性数。

考虑椭圆曲线上的一维矢量丛 $\Sigma\to\Gamma$，Γ 是由纤维丛 $\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}$ 将铅直直线(铅直指标记作 r) 按以下方式粘结而得：

$$(r,\varphi)\sim(r,\varphi+2\pi)\sim(\lambda e^{ip\varphi}r,\varphi+\omega),$$

p 为整数，λ 是非 0 复数。

问题 求所得纤维空间的零截口 ($r=0$) 的自交指标，假设 Σ 按复流形定向(复流形的定向是使复平面的相交指标恒为正。复坐标为 $(z_1,\cdots,z_n)$ 的空间是由坐标为 $(\operatorname{Re}z_1,\cdots,\operatorname{Im}z_1,\cdots,\operatorname{Im}z_n)$ 定向的)。

答 若 $\operatorname{Im}\omega>0$ 时，指标为 $-p$。

注 椭圆曲线上的所有 1 维矢量丛，除相差一个双全纯等价性以外，全尽于此。

E. 椭圆曲线在一复曲面上的邻域

考虑复曲面上的椭圆曲线。它在此曲面上的邻域定义了此曲线上的 1 维矢量丛——法丛。法丛在一点上的纤维即曲面在该点处之切空间对曲线的切子空间的商空间。

法丛空间本身也是一个复曲面。原椭圆曲线则(作为零截口)嵌入于此曲面中。

这样，便产生了以下问题：曲线在原曲面上的充分小邻域可否双全纯地映到它在法丛中的邻域上。后来发现，这个问题很接近于微分方程(或光滑映射)在不动点附近可否化为线性标准形式问题，而且可用同样的方法解决。

首先证明，椭圆曲线在曲面上的邻域一般不可能在此曲线上全纯地纤维化。

例 考虑这样一族椭圆曲线，族中相邻的曲线彼此不能双全纯地等价。例如，在两个复变量 (φ, ω) 的平面上将点 (φ, ω)，$(\varphi+2\pi, \omega)$，$(\varphi+\omega, \omega)$等同起来，就可得到这样的族。在等同以后，区域 $\operatorname{Im}\omega>0$ 变为椭圆曲线 $\omega=\text{const}$. 的并集。这些曲线中没有一个其邻域可以全纯地映到这曲线上，并使这条曲线本身不变。

事实上，如果这样的映射存在，就会得出接近于恒等映射的双全纯映射，它把 ω 很接近但又不相同的椭圆曲线互相映射，而这是不可能的。

可以证明，上面所考虑的例子在某种意义下是例外的：嵌入在复曲面并有 0 自交指标的椭圆曲线的邻域，“一般说来”双全纯地等价于该曲线在法丛中的邻域（和微分方程在奇点附近一般说来等价于线性方程有相同的意义）。在这个例子中，例外在于：上面作出的椭圆曲线族的每一个的法丛都是平凡的(即为直积)。

F. 初步的标准形式

椭圆曲线可以通过将圆环的边界圆周全纯地粘结起来而得。同样，曲面上的椭圆曲线的邻域也可以由曲面上的环形邻域将其边界流形全纯地粘起来而得。这些边界流形的实维数为 3；粘结可以全纯地拓展到边界的邻域。

可以证明，复曲面上闭圆环的双全纯象的充分小邻域恒可双全纯地映为一圆环的邻域，这个圆环嵌入在直积 $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ 的因子复直线 $\mathbf{C}$ 中。

和上面提到的关于椭圆曲线 1 维矢量丛全纯分类的结果相似，上面说的关于环的邻域结果证起来也不简单，要用到多复变函数论的一些技巧（层，椭圆型偏微分方程，或者它们的某些代替品）。

我们不作证明而只直接假设，包含椭圆曲线的这个曲面可以由粘结直积中的圆环得到。

这样，考虑一个曲面，其点由两个复变量平面上的点 (r,φ) 通过以下的粘结得到：

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} r \\ \varphi+2\pi \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} rA(r,\varphi) \\ \varphi+\omega+rB(r,\varphi) \end{pmatrix},$$

函数 A，B 对 φ 有周期 2π，且在 φ 的实轴附近全纯。

这里圆环可由复 φ 轴上的带形 $0\leqslant\operatorname{Im}\varphi\leqslant\operatorname{Im}\omega$，将点 $(0,\varphi)\sim(0,\varphi+2\pi)$ 粘结而得，r，φ 是直积之坐标。

给出上述粘结的函数对 (A,B) 定义了一个邻域。适当选择坐标 (r,φ) 可以改变 A，B 的形状。现求一坐标，使 A，B 尽可能地简单。

先考虑线性坐标变换 $r_{新}=C(\varphi)r$，函数 C 在 φ 轴的带形 $0\leqslant\operatorname{Im}\varphi\leqslant\operatorname{Im}\omega$ 中全纯，以 2π 为周期且在此带中处处不为 0。

定理　可以适当选择决定铅直坐标线性变换的函数 C，使得在新坐标系下，表示粘结的函数 $A(0,\varphi)$ 形如 $\lambda e^{ip\varphi}$（p 是整数且为椭圆曲线 $r=0$ 在该曲面上的自交指标的相反数）。

◀函数 $A(0,\varphi)$ 定义了曲线在该曲面上的法丛。这个丛双全纯地等价于由以下方式粘结的丛：

$$(r,\varphi)\sim(r,\varphi+2\pi)\sim(\lambda e^{ip\varphi}r,\varphi+\omega)$$

（见 § 27 D 的注）。变量 r 的这个线性变换把法丛的粘结化为这个典则形式，并给出 $A(0,\varphi)$ 以上形式。▶

定义 当此曲线有零自交指标时，一个曲面上的椭圆曲线邻域的初步标准形式，即指以下的粘结：

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r\lambda(1 + ra(r, \varphi)) \\ \varphi + \omega + rb(r, \varphi) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r \\ \varphi + 2\pi \end{pmatrix},$$

其中 a, b 是 φ 的 2π 周期函数，它们在实 φ 轴附近全纯，λ 是非 0 复数。

以后我们不总是约定：φ 坐标只相差 2π 的点为恒同，因为我们遇到的函数都是周期 2π 的，而 φ 可以假设为属于柱面 $C \bmod 2\pi$.

G. 形式的标准形式

定义 一对数 (λ, ω) 称为共振的，如果有不同时为 0 的整数 n 和 k，使得 $\lambda^n = e^{ik\omega}$.

定理 共振的数对组成了所有复数对空间中一个处处稠密的集合。

◀这可由形如 $i\left(\frac{k}{n}\omega + \frac{m}{n}2\pi\right)$ (k, m 为整数，n 为自然数) 的点集在复直线上的处处稠密性而得。▶

定理 数对 (λ, ω) 为共振的，当且仅当相应于粘结 $(r, \varphi) \sim (r, \varphi + 2\pi) \sim (\lambda r, \varphi + \omega)$的、在原椭圆曲线某个循环 n 叶覆盖上的丛为平凡的。

◀若 $\lambda^n = e^{ik\omega}$, 则 $(r, \varphi) \sim (e^{ik\omega}\lambda, \varphi + n\omega)$, 从而丛 $C/2\pi Z + n\omega Z$ 是平凡的(见 § 27 C). 其逆的证明与此相类。▶

定义 以下的"映射"称为形式粘结：

$$f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rA(r, \varphi) \\ \varphi + \omega + rB(r, \varphi) \end{pmatrix},$$

A, B 是 r 的形式幂级数，其系数在实 φ 轴上解析，对 φ 有周期 2π, 而且 $A(0, \varphi) \neq 0$.

以下的"映射"称为形式的变量变换：

$$g\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rC(r, \varphi) \\ \varphi + rD(r, \varphi) \end{pmatrix},$$

C, D 是 r 的形式幂级数，其系数在复 φ 轴的带 $0 \leqslant \mathrm{Im}\varphi \leqslant \mathrm{Im}\omega$ 中解析，对 φ 有周期 2π，而且 $C(0, \varphi) \neq 0$。

形式的变量变换 g 可以作用在形式粘结 f 上，如下：$f \longmapsto g\circ f\circ g^{-1}$（右方定义为幂级数自然的代入，因此也是形式粘结）。

定理　若数对 (λ, ω) 是非共振的，则所有的形式粘结

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r\lambda(1 + ra(r,\varphi)) \\ \varphi + \omega + rb(r,\varphi) \end{pmatrix},$$

均可用形式的变量变换化为线性标准形式

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda r \\ \varphi + \omega \end{pmatrix}.$$

◀现在依次消去 ra 和 rb 中关于 r 的 $1, 2, \cdots$ 次项。为此，和通常一样，需要解出线性的同调方程。现在写出 n 次项的规则化方程。

引理　考虑关于 u 的方程

$$\lambda^n u(\varphi + \omega) - u(\varphi) = v(\varphi),$$

v 是 2π 周期函数，且在带 $\alpha \leqslant \mathrm{Im}\varphi \leqslant \beta$ 中解析。若 $\tau = \mathrm{Im}\omega > 0$，$\lambda \neq 0$ 且对任意整数 k，$\lambda^n \neq e^{ik\omega}$，则此方程有以 2π 为周期的解 u，并且它在带 $\alpha \leqslant \mathrm{Im}\varphi \leqslant \beta + \tau$ 中解析。

◀令

$$u(\varphi) = \Sigma u_k e^{ik\varphi}, \quad v(\varphi) = \Sigma v_k e^{ik\varphi}.$$

于是可得 $u_k = \dfrac{v_k}{\lambda^n e^{ik\omega} - 1}$.

当 $k \to +\infty$ 时，$|v_k|$ 可以用 $e^{k(\alpha-\varepsilon)}$ 阶的量从上方估计，$e^{ik\omega} \to 0$。所以 $|u_k|$ 也可用 $e^{k(\alpha-\varepsilon)}$ 阶的量从上方估计。

当 $k \to -\infty$ 时，$|v_k|$ 可以用 $e^{-|k|(\beta+\varepsilon)}$ 阶的量从上方估计，而 $|e^{ik\omega}|$ 如 $e^{|k|\tau}$ 那样增长 $(\tau = \mathrm{Im}\omega > 0)$。从而 $|u_k|$ 可以用 $e^{-|k|(\beta+\tau+\varepsilon)}$ 阶的量从上方估计。由此可得：u 的 Fourier 级数在带形 $\alpha \leqslant \mathrm{Im}\varphi \leqslant \beta + \tau$ 内收敛。▶

令 $ra = r^n a_n(\varphi) + \cdots$，$rb = r^n b_n(\varphi) + \cdots$，这里"$\cdots$"表示高于 n 阶的项。

现作形式的变量变换，其中 $C(r,\varphi)=1+r^nC_n(\varphi)$，$rD(r,\varphi)=r^nD_n(\varphi)$. 直接代入可知，变换后 ra 与 rb 中 r^n 的系数形如

$$\tilde{a}_n(\varphi)=a_n(\varphi)+\lambda^nC_n(\varphi+\omega)-C_n(\varphi),$$
$$\tilde{b}_n(\varphi)=b_n(\varphi)+\lambda^nD_n(\varphi+\omega)-D_n(\varphi).$$

从方程 $\tilde{a}_n=0$，$\tilde{b}_n=0$，可以求得 C_n，D_n. 由引理可知这些方程在带 $0\leqslant \mathrm{Im}\varphi\leqslant\tau$ 中有解析的解。我们这样作出了形式的变量变换，以使 ra，rb 中最低次数逐渐增加。对 $n=1,2,\cdots$，反复这样作法，即得使 ra，rb 完全消去的形式的变量变换。▶

H. 解析的标准形式

定义　复数对 (λ,ω)，其中 $\mathrm{Im}\omega\neq0$，$\lambda\neq0$ 称为正常的，如果存在常数 $C>0$，$\nu>0$，使得对一切整数 k，$n(n\neq0)$，有

$$|\lambda^ne^{ik\omega}-1|\geqslant C(|n|+|k|)^{-\nu}.$$

很容易证明

定理　非正常数对 (λ,ω)，对任意固定的 ω，组成一个 Lebesgue 测度为 0 的处处稠密的集合。

定理　若 (λ,ω) 为正常数对，则所有全纯的粘结

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} r\lambda(1+ra(r,\varphi)) \\ \varphi+\omega+rb(r,\varphi) \end{pmatrix},$$

都可用全纯的变量变换化为线性标准形式：$(r,\varphi)\longmapsto(\lambda r,\varphi+\omega)$.

◀证明与 §28 中 Siegel 定理的证明类似。▶

现将这个定理翻译成椭圆曲线嵌入的语言。

定义　全纯向量丛 ξ 称为刚性的，若其底在一复流形中任意的嵌入只要使 ξ 为其法丛，则嵌入后的底在此流形中的充分小邻域均可双全纯地映到 ξ 的零截口的邻域上。

用这样的术语，上述定理可以重述如下：

推论　在椭圆曲线上，几乎所有（在 Lebesgue 意义下）0 次 1 维向量丛都是刚性的。

注．对某些非共振的丛，其中数对 (λ, ω) 是非正常的，把粘化为标准形式的形式级数可能发散．这种非正常数对 (λ, ω) 组成零测度的处处稠密集．对于这个问题，我们将在 § 36 中详细讨论．

I. 负邻域

考虑曲面上椭圆曲线自交指标非 0 的情况．若此指标为负，则曲线在全纯曲线族中是不可变形的．若不然，变形后的曲线将与原曲线以正的相交指标相交(因为二者都是复曲线)．

这样，具有负自交指标的曲线在曲面上是孤立的．这种曲线称为**例外曲线**，其邻域称为**负邻域**．

定理（Grauert） 例外曲线的法丛是刚性的，即复曲面上的负自交指标的曲线邻域(除相差双全纯等价性以外)全由其法丛决定．

现只就椭圆曲线情况对此定理给出一个简证．

◀先从粘结的初步标准形式开始：

$$f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\lambda e^{ip\varphi}(1 + ra(r, \varphi)) \\ \varphi + \omega + rb(r, \varphi) \end{pmatrix}.$$

设 ra 和 rb 中 r 的低于 n 次的项均已消去，即

$$ra = r^n a_n(\varphi) + \cdots, \quad rb = r^n b_n(\varphi) + \cdots.$$

作形式的变量变换 $g(r, \varphi) = (r(1+r^n C_n(\varphi)), \ \varphi + r^n D_n(\varphi))$．在变换后(即粘结 $g\circ f\circ g^{-1}$)，ra 和 rb 中 r^n 的系数是

$$\tilde{a}_n(\varphi) = a_n(\varphi) + \lambda^n e^{ipn\varphi} C_n(\varphi + \omega) - C_n(\varphi) - ipD_n(\varphi),$$

$$\tilde{b}_n(\varphi) = b_n(\varphi) + \lambda^n e^{ipn\varphi} D_n(\varphi + \omega) - D_n(\varphi).$$

令 $\tilde{b}_n$ 和 $\tilde{a}_n$ 为 0．为此先由第二个方程求出 D_n，再由前一个求出 C_n．在两种情况下都需要解出以下形状的同调方程

$$\lambda^n e^{ipn\varphi} u(\varphi + \omega) - u(\varphi) = v(\varphi),$$

u 是未知的 2π 周期函数，v 是已知的 2π 周期函数．

3. 同调方程的研究

考虑未知和已知函数的 Fourier 级数展开式

$$u = \sum u_k e^{ik\varphi}, \quad v = \sum v_k e^{ik\varphi}.$$

于是可得 Fourier 系数的方程

$$\lambda^n e^{i(k-pn)\omega} u_{k-pn} - u_k = v_k.$$

利用这些方程，在已知前 pn 个 u_k 后，原则上，可以依次算出所有未知的 u_k。但所得的形式 Fourier 级数不一定收敛。可以证明，当曲面上椭圆曲线自交指标为负(即 p 为正)时，可保证收敛性。

事实上，先考虑齐次方程，也就是说，设所有 v_k 为 0。

上述方程将指标 k 是公差为 pn 的等差数列的 u_k 连结起来对于 k 属于此数列的 u_k，可从其中之一来计算其余各项。我们需要逐次地遍乘以 $\lambda^n e^{i(k-pn)\omega}$ 这样的数，k 属于此数列.这些数的对数是公差为 $ipn\omega$ 的等差数列。所以对数之和组成 $\alpha s^2 + \beta s + \gamma$ 形状的数列，s 是数列的项数，$2\alpha = ipn\omega$。

若 $p > 0$，$\mathrm{Im}\omega > 0$，则 $\mathrm{Re}\alpha < 0$。这时数列 $|e^{\alpha s^2+\beta s+\gamma}|$ 当 $s \to \pm\infty$ 时快速趋于 0。由此可知，当 $p > 0$ 时，齐次同调方程有 pn 个线性无关解，且当 $|s| \to \infty$ 时急减。

现在来解非齐次方程。先设已知函数的 Fourier 级数只有一个 v_m 非 0。在 m 左面，令 $u_k = 0$，而当 $k \geqslant m$ 时，由方程来决定 u_k。于是在 m 右方，u_k 将等于齐次方程的解之一，从而将如 $|e^{\alpha s^2}|$ 那样下降。

一般情况下非齐次方程的解将是由系数 v_k 如上作出的解的线性组合。条件 $\mathrm{Re}\alpha < 0$ 可以保证收敛性，亦即曲面上原椭圆曲线的自交指标为负，即可保证收敛性。

将以上大略提出的估计详细进行，即知在自交指标为负(亦即 p 为正)时，同调方程可解。从而可得曲面上椭圆曲线负法丛的形式的刚性.对以上作法作更精确的分析也可证明解析刚性(即Grauert 定理)： 这里收敛性的证明比 § 27 **G** 和 **H** 中所研究的 $p =$

0 的情况更简单，因为 Poincaré 定理比 Siegel 定理（§ 28）更简单。▶

K. 正邻域

设曲面上的椭圆曲线自交指标为正。这时前一节讨论的同调方程一般不可解，因为当 $|s| \to \infty$ 时，$|e^{\alpha s^2+\beta s+\gamma}|$ 上升。这意味着，在一般复曲面上具有正自交指标椭圆曲线的邻域不仅自身不可能双全纯地映到这条曲线在法丛中的邻域上，甚至在 2 阶节的水平上(即略去对到曲线的距离为 3 阶量的项)也不可能。具有正自交指标的椭圆曲线的邻域称为正邻域。

由上所说，椭圆曲线的正邻域应该有模（moduli）甚至是函数模：邻域的标准形式必包含任意函数(显然，甚至包含两个变量的函数或两变量函数在几个点上的芽)。

负自交指标的曲线在曲面上是孤立的，具有正自交指标的椭圆曲线却总是可变形的。

定理（**Riemann-Roch 定理的特例**）　若曲面上的椭圆曲线的自交指标为 p，则其法丛有 p 个线性无关的截口。

◀问题可化为齐次同调方程，其形如

$$u(\varphi+\omega)=\lambda e^{ip\varphi}u(\varphi),$$

而在 § 27 J 中已看到，它有 p 个线性无关的解。▶

转到椭圆曲线的距离更高阶的项，我们知道，存在着曲线在其邻域中的 p 参数变形。

由此还可知道，椭圆曲线在曲面上的邻域，若此曲线有正的自交指标，在此曲曲线上一般地没有丛结构。事实上，在变形时，椭圆曲线的复结构一般地是会改变的。所以在彼此接近的变形后的曲线中，可以找到不能双全纯地映到原曲线上的曲线。

在研究微分方程如何穿过共振时，我们只会遇到如下曲面上的椭圆曲线邻域，在其中自交指标为 0。

L. 空间中的椭圆曲线

以上对于曲面上的椭圆曲线邻域所作的许多讨论，都可以移

到高维空间的椭圆曲线上去。为此，在以上公式中的 r 应该看成是高维的。

椭圆曲线上的任意维向量丛可以用粘结 $(r, \varphi) \sim (r, \varphi + 2\pi) \sim (A(\varphi)r, \varphi + \omega)$ 来表示，$A(\varphi)$ 是 Jordan 标准形的线性算子，其固有值为 $\lambda e^{ip\varphi}$。

若所有的 p 都为正（非负、0）即称此丛为**负的**（**非正的**、**零的**）。

设椭圆曲线的法丛为负。这时曲线在流形上的邻域可以双全纯地映为它在法丛中的邻域（Grauert 定理），即其法丛是刚性的。在零法丛时，刚性被破坏的概率为零[1]。共振条件形为 $\lambda_s = \lambda^n e^{ik\omega}$，$k$ 是整数，$\lambda^n = \lambda_1^{n_1}\cdots\lambda_m^{n_m}$，$m = \dim\{r\}$，$n_j \geqslant 0$，$\Sigma n_j \geqslant 2$。

非共振丛是形式刚性的。对于真正的全纯刚性，通常的 (C, ν)-规则性条件

$$|\lambda^n e^{ik\omega} - \lambda_s| \geqslant C(|n| + |k|)^{-\nu}, |n| = n_1 + \cdots + n_m$$

$$n_j \geqslant 0, \quad \Sigma n_j \geqslant 2,$$

对一切整数 k 已足够。对任意 $(C, \nu) > 0$ 均不是 (C, ν)-规则性的向量 λ 集合的测度为 0。

非正的丛具有刚性的概率显然为 1。

类数（genus）大于 1 的曲线邻域的构造（除了法丛为负，从而可由 Grauert 定理判定是刚性的），还研究极少。

§ 28. Siegel 定理的证明

在本节中，我们将证明一个映射及其在不动点处的线性部分的全纯局部等价性定理。

A. 定理的陈述

定义 数组 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$ 称为具有**乘法型** (C, ν)，

---

1) 证明见 Ю. С. Ильяшенко, А. С. Пяртли [1]——英译者注

如果对任意s以及任意模大于1，而且分量为非负的整数向量k，均有$(C>0,\ \nu>0)$：

$$|\lambda_s-\lambda^k|\geqslant C|k|^{-\nu},\quad |k|=k_1+\cdots+k_n,$$
$$\lambda^k=\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}.$$

定理　设全纯映射在$\mathbf{C}^n$中的不动点O附近的线性部分固有值组具有乘法型(C,ν)。则在O点的某个邻域中，此映射双全纯地等价于其线性部分。

令A为$O\in\mathbf{C}^n$点附近的双全纯映射，并使O点不动。又设线性算子Λ为A在O点的线性部分。今证必存在O点附近的，使O不动的微分同胚H，它满足$H\circ A\circ H^{-1}=\Lambda$（在$O$点的某个邻域中）。

我们将在Λ的固有值λ_s均相异的情况下证明这个定理。这时可以选取这样的坐标系，使Λ的矩阵为对角阵。固定采用这个坐标系。

B. 坐标变换H的作法

将所给的映射A与坐标变换H分别写作

$$A(z)=\Lambda z+a(z),\quad H(z)=z+h(z),$$

其中$a(z)$与$h(z)$在0处的Taylor级数没有0次与1次项。算出$H\circ A\circ H^{-1}$中关于a和h的0次及1次项，即可把映射$H\circ A\circ H^{-1}$写作

$$(H\circ A\circ H^{-1})(z)=\Lambda z+[a(z)-\Lambda h(z)$$
$$+h(\Lambda z)]+R([a],[h])(z),$$

余项R关于a和h是二阶小量，其意义将在下面解释。我们在R中把变元放在方括弧里，原因是强调算子R作用在函数上，而不是作用在函数在z点的值上。

考虑关于h的同调方程

$$\Lambda h(z)-h(\Lambda z)=a(z).$$

这里已知的向量函数a与未知的向量函数h的Taylor级数没有自由项与线性项。在这一类级数中，方程是唯一可解的，因为

固有值组是非共振的。

我们将在§28 **C** 中证明，只要固有值组，对于某个正的 C 和 ν，具有乘法型 (C,ν)，所得的级数就是收敛的。用 U 表示将同调方程的右方 a 变为其解的算子：$h=U([a])$。

现在用以下公式来递推地定义函数 a_s，h_s：

$$h_s=U([a_s]),\quad a_{s+1}=R([a_s],[h_s]),$$

而初值取 $a_0=a$。

作映射 $H_0, H_1, \cdots$，其定义如下：

$$H_s(z)=z+h_s(z).$$

我们将证明，所求的变换由下式定义：

$$H=\lim_{s\to\infty}H_s\circ\cdots\circ H_1\circ H_0.$$

C. 同调方程的研究

我们设同调方程

$$Ah(z)-h(Az)=a(z)$$

的右方与解的 Taylor 级数都没有自由项与线性项。用 $|z|$ 记 $\max|z_i|$。

引理 1 设对角形线性算子 A 的固有值组具有乘法型 (C,ν)。设同调方程的右方 a 在重柱体 $|z_i|\leqslant r$ 上连续，在其中全纯。

这时同调方程有解 h，它在重圆柱体内全纯，而且对任意适合 $0<\delta<\dfrac{1}{2}$ 的 δ，满足不等式

$$\max_{|z|\leqslant re^{-\delta}}|h(z)|\leqslant\max_{|z|\leqslant r}|a(z)|/\delta^{\alpha}.$$

这里正常数 $\alpha=\alpha(A)$，不依赖于 δ，a 和 r。

◀将 a 和 h 展开为 Taylor 级数，并记 z^ke_s 的系数为 a_k^s 与 h_k^s。于是 $h_k^s=a_k^s/(\lambda_s-\lambda^k)$。现用 Taylor 系数的 Cauchy 不等式来估计分子，并用 $\{\lambda_s\}$ 为 (C,ν) 型来估计分母。

用 M 记 $\max\limits_{|z|\leqslant r}|a(z)|$，由 Cauchy 不等式，有 $|a_k^s|\leqslant M/r^{|k|}$。

因此 $|h_k^i| \leqslant MC^{-1}|k|^{\nu}/r^{|k|}$.

再估计 Taylor 和式 $\Sigma h_k^i z^k$. 先看 $|k| = p$ 次项. 其个数不超过 $c_1(n)p^{n-1}$, 所以 $\left|\sum_{|k|=p} h_k^i z^k\right| \leqslant M c_2 p^m |(z/r)^k|$, 其中 $c_2 = c_1/C$, $m = \nu + n - 1$.

函数 $x^m e^{-x}$ 的最大值是 $(m/e)^m$, 所以 $p^m e^{-\delta p/2} \leqslant c_3 \delta^{-m}$, $c_3 = (2m/e)^m$.所以当 $|z| \leqslant re^{-\delta}$ 时, $|h| \leqslant Mc_3\delta^{-m}\sum_{p=1}^{\infty} e^{-p\delta/2} = Mc_3\delta^{-m}/(e^{\delta} - e^{\delta/2})$, $|h| \leqslant Mc_4\delta^{-(m+1)}$, $c_4 = 4c_2c_3$ 与 a, r, δ 无关. ▶

以下除了函数 h 的估计外还需要函数 $h\circ A$ 的估计, 后者的定义是 $(h\circ A)(z) = h(Az)$.

引理 2 在引理 1 的条件下

$$\max_{|z|\leqslant re^{-\delta}} |h(Az)| \leqslant \max_{|z|\leqslant r} |a(z)|/\delta^{\alpha_0},$$

这里正常数 $\alpha_0 = \alpha_0(A)$ 与 δ, a, r 均无关.

◀先从以下的注解开始.

设 $\{\lambda_s\}$ 具有乘法型 (C, ν). 则必存在与 h 无关的正常数 C_0,使得对一切 $s = 1, \cdots, n$, 有

$$|\lambda_s - \lambda^k| \leqslant C_0|k|^{-\nu}|\lambda^k|,$$

k 是具有非负分量 $k_i \geqslant 0$, $|k| = \Sigma k_i \geqslant 2$ 的整数向量.

◀用 μ 记 $\max|\lambda_s|$. 当 $|\lambda^k| \leqslant 2\mu$ 时, 可取 $C_0 = C/2\mu$. 当 $|\lambda^k| > 2\mu$ 时, 可取 $C_0 = 1/2$. ▶

估计 Taylor 级数,由前面的证明可得

$$|h(Az)| \leqslant \Sigma M C_0^{-1}|k|^{\nu}|\lambda^k|^{-1}|\lambda^k z^k/r^k|.$$

以下的估计和引理 1 的证明一样. ▶

D. 算子的阶

为了作进一步的估计, 采用以下的记号很方便. 令 f 是在重圆柱 $|z| \leqslant r$ 上连续,在其内解析,在其中心为 0 的函数.

对这种函数引入范数

$$\|f\|_r = \sup_{0<|z|<r} |f(z)|/|z|.$$

例 函数 $f(z)=sz$ 的范数是 $|s|$，它与重圆体的半径无关。

注 以上的范数的好处在于它在相似变换下不变：对任意的放大系数 χ，有

$$\|\chi f\circ\chi^{-1}\|_{\chi r} = \|f\|_r.$$

f 之值不一定是数而可以是某个赋范空间的元素，例如向量、矩阵等等。

令 Φ 是上述函数类上的算子[1]. 令 d,α,β 是正数，$0<r<1$.

定义 若对区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 中的任意 δ 和 $(0,1)$ 中的 ε，若只要 $\|f\|_r\leqslant\delta^\beta$，就有

$$\|\Phi([f])\|_{re^{-\delta}}\leqslant\|f\|_r^d\delta^{-\alpha},$$

则说 Φ 的阶是 $(d;\alpha|\beta)$.

我们将记此关系为 $\Phi([f])\prec f^d(\alpha|\beta)$，或简作 $\Phi([f])\prec f^d$.

若对一个算子存在常数 α,β，使它具有阶 $(d;\alpha|\beta)$，我们就说它的阶是 d $\left(\text{重要的是 }\alpha,\beta\text{ 与 }f,\ r\in(0,1)\text{ 和 }\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\text{均无关}\right)$.

例 1 考虑局部将同调方程右方 a 变为其解 h 的算子. 若 $\{\lambda_s\}$ 是 (C,ν) 型的，则这个算子的阶是 1. 实际上由引理 1 即可得出所需的不等式.

同样，由引理 2 可知，变同调方程右方 a 为函数 $h\circ A$ 的算子阶为 1：$h\prec a$，$h\circ A\prec a$

例 2 考虑微分同胚 H，$H(z)=z+h(z)$，其逆微分同胚写作

$$H^{-1}(z)=z-g(z).$$

考虑变 h 为 g 的算子 G.

算子 G 的阶是 1，即 $g\prec h$.

◀先注意由 Cauchy 估计可得以下不等式：当 $|z|\leqslant re^{-\delta/2}$ 时，有

---

1) 作用在不同 r 的函数类上的算子将用同一字母表示，只要在函数芽的空间上它们是相同算子即可，这和通常在分析中的作法一样；正弦函数的记号 sin 不变，但其定义域可变.

$$|\partial h_i/\partial z_j| \leqslant \|h\|_r/(1-e^{-\delta/2}). \tag{1}$$

若 $\|h\|_r \leqslant \delta^\beta$，$\beta$ 充分大，则上述不等式右方充分小。现在可取以下迭代的极限为 g：

$$g_{s+1}(z) = h(z - g_s(z)),\ \ g_0 = 0.$$

由压缩映象原理，易得 $|z| \leqslant re^{-\delta}$ 时的收敛性与估计式 $g \prec h$. ▶

例3 仍用例2的记号，有

$$h - g \prec h^2.$$

◀事实上，由函数 g 的定义，

$$h(z) - g(z) = h(z) - h(z - g(z)).$$

由不等式 (1) 与上面得到的估计，有

$$\|g\|_{re^{-\delta}} \leqslant \|h\|_r \delta^{-\alpha},$$

当 $|z| \leqslant re^{-\delta}$ 时，有

$$|h(z) - g(z)| \leqslant C\|h\|_r(1-e^{-\delta/2})^{-1}r\|h\|_r\delta^{-\alpha}. ▶$$

注意，用我们的记号有 $2f \prec f$，$f^2 \prec f$；若 $f_1 \prec f_2$，$f_2 \prec f_3$，则 $f_1 \prec f_3$.

现将上面的记号推广到几个函数的算子。设算子 Ξ 将一对函数 η，ζ 变为函数 ξ. φ 为多项式。我们将记

$$\xi \prec \varphi(\eta, \zeta),$$

如果存在这样的正数 $(\alpha; \beta_1, \beta_2)$，使得对于区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 中的任意的 δ 和 $(0, 1)$ 中的任意的 r，不等式

$$\|\Xi([\eta], [\zeta])\|_{re^{-\delta}} \leqslant \varphi(\|\eta\|_r, \|\zeta\|_r)\delta^{-\alpha},$$

成立，这里只要 $\|\eta\|_r \leqslant \delta^{\beta_1}$，$\|\zeta\|_r \leqslant \delta^{\beta_2}$，$\alpha$ 和 β 不应依赖于 η，ζ，$r \in (0, 1)$ 或 $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. 若 $\eta \prec \psi(\sigma, \tau)$，则 $\xi \prec \varphi(\psi(\sigma, \tau), \zeta)$.

例4 用下式定义算子 Ξ：

$$\xi(z) = \eta(z - \zeta(z)) - \eta(z),$$

则 $\xi \prec \eta\zeta$.

◀用证明例2，3的不等式 (1) 即可得证。▶

E. 余项的估计

现在明显写出 §28 **B** 中定义的余项 R. 记

$$H(z)=z+h(z),\ H^{-1}(z)=z-g(z).$$

由定义

$$R(z)=(H\circ A\circ H^{-1})(z)-\Lambda z-[a(z)-\Lambda h(z)+h(\Lambda z)].$$

把R写成 $R=R_1+R_2+R_3$, 其中

$$R_1(z)=\Lambda(h(z)-g(z)),\ R_2(z)=a(z-g(z))-a(z),$$

$$R_3(z)=h(\Lambda z-\Lambda g(z)+a(z-g(z)))-h(\Lambda z).$$

为了以下便于估计，我们将R表示为三个变元 a, h 和 $u=h\circ\Lambda$ 的算子。

引入算子

G, $G([h])=g$, Ξ, $\Xi([a],[g])(z)=a(z-g(z))-a(z)$.

用此记号,有

$$R_1([h])=\Lambda(h-G([h])),$$

$$R_2([a],[h])=\Xi([a],G([h])),$$

$$R_3([u],[a],[h])=\Xi([u],[v]),$$

这里 $v=g(z)-\Lambda^{-1}a(z-g(z))$.

以 $u=h\circ\Lambda$ 代入算子 $R_1+R_2+R_3$, 即可得要估计的余项 $R([a],[h])$. 令 $h\prec id$ (id 即恒等算子;这条件表示 h 的导数很小)。

估计 1 $R_1([h])\prec h^2$, $R_2([a],[h])\prec ah$, $R_3([u],[a],[h])\prec u(h+a)$.

◀$R_1\prec h^2$ 已在 §28 **D** 例 3 中得证，不等式 $\Xi([a],[g])\prec ag$ 见例 4。由例 2, $G([R])\prec h$, 所以 $R_2([a],[h])\prec ah$.

对于上面引入的 v, 由已得的估计 $g\prec h$, 有 $v\prec h+a$. 故由例 4 中算子Ξ的估计,有 $R_3\prec u(h+a)$. ▶

估计 2 设 U 为解出同调方程的算子。则由

$$\Phi([a])=R([a],U([a]))$$

给出的算子Φ阶为2。

◀由§28 **C** 中的引理1，2，3，有 $h \prec a$，$h \circ A \prec a$。这里 $h = U([a])$。

与估计1比较，即有

$$R_1(U([a])) \prec a^2,\quad R_2([a], U([a])) \prec a^2,$$

$$R_3(U([a]) \circ A,\ [a], U([a])) \prec a^2.$$ ▶

F. 各次逼近的收敛性

Siegel 定理证明的末尾恰和§12中的估计一样。

◀选取以下数列

$$\delta_0,\ \delta_1 = \delta_0^{3/2},\ \delta_2 = \delta_1^{3/2}, \cdots;$$

$$M_0 = \delta_0^N,\ M_1 = M_0^{3/2}, \cdots,\ M_s = M_{s-1}^{3/2} = \delta_s^N, \cdots;$$

$$r_0,\ r_1 = e^{-\delta_0} r_0,\ r_2 = e^{-\delta_1} r_1, \cdots.$$

这些数列由 δ_0, N 和 r_0 的选择决定。

取 δ_0 这样小，使所有 r_s 大于 $r_0/2$。下面讲N的选取。

按估计2，存在这样的常数α和β，使得

$$\|R([a], U([a]))\|_{re^{-\delta}} \leqslant \|a\|_r^2 \delta^{-\alpha},$$

只要 $\|a\|_r \leqslant \delta^\beta$.

定义 $a_{s+1} = R([a_s], U([a_s]))$。设 $\|a_s\|_{r_s} \leqslant M_s = \delta_s^N$。于是当$N > \beta$时，对 $\delta = \delta_s$ 应用以上不等式，我们得到

$$\|a_{s+1}\|_{r_{s+1}} \leqslant M_s^2 \delta_s^{-\alpha} = \delta_s^{2N-\alpha}.$$

若$N > 2\alpha$，则右方不超过 $M_{s+1} = \delta_s^{3N/2}$. 所以固定 $N > (\beta,\ 2\alpha)$ 这时，若 $\|a_0\|_{r_0} \leqslant M_0 = \delta_0^N$，则对一切 s 将有 $\|a_s\|_{r_s} \leqslant M_s = \delta_s^N$.

最后选 r_0。由条件，初始函数 $a_0 = a$ 在坐标原点有不低于二阶的零点。所以，在点 $z = 0$ 的某个邻域中有

$$|a(z)| \leqslant K|z|^2.$$

由此可知

$$\|a_0\|_{r_0} \leqslant K r_0.$$

这意味着对充分小的 r_0，条件 $\|a_s\|_{r_0} \leqslant \delta_0^N$ 成立。固定这样的 r_0.

现在所有的数 δ_s, M_s, r_s 都已定义。对所有的 s，不等式 $\|a_s\|_{r_s} \leqslant M_s$ 均满足. 由此可得 h_s 的估计。所以乘积 $H_s \circ \cdots \circ H_1$ 当 $|z| \leqslant r_0/2$ 时，有定义；而且当 $s \to \infty$ 时，它收敛于极限 H. 不难验证，对于极限的微分同胚有 $H \circ A \circ H^{-1} = \Lambda$. ▶

第六章　分枝的局部理论

“分枝”一语本意是一分为二．在本书中，它被广泛地用于表示，当参数变化时，图象定性的，拓扑的变形，所研究的对象正是依赖于这些参数的．这里说的对象形形色色：例如可以是实或复的曲线或者曲面，函数或者映射，流形或者丛，向量场或者微分或积分方程．

如果对象依赖于参数，我们就说有一个族．如果我们只局部地研究族，而参数只在某定值的邻域中有小的变化，就说对象在相应的参数值处形变．

在许多情况下会发生这样的事，研究各种形变都归结为研究唯一形变而其余的都可由它得出．这种形变在某种意义下是最丰富的，它应该能给出对象的一切可能的形变；我们称它为遍有形变[1]．

本章主要讨论动力系统的相图在平衡位置或闭轨附近的分枝与遍有形变．

§ 29.　族与形变

本节，我们将讨论作为分枝理论基础的一些一般的“启发性”想法．这些想法基本上应归于 H. Poincaré

A.　通有情况与小余维数的奇异情况

在研究各种解析对象(例如：微分方程，其边值问题，或优化

1) “遍有”是 versal 一词的试译．它是从“universal”一词衍生而来，但意义又略有不同，鉴于后者常译为“万有”，故将“versal”试译为“遍有”以正于读者．——译者注

问题)时，通常可以分出通有情况．例如，平面向量场的奇点中结点，焦点与鞍点是通有的，而中心点则在场的任意小摄动下都会被破坏．

在分析一个数学模型所描述的现象与过程时，研究通有的情况是第一位的任务．事实上，只要模型有任意小的变动，非通有的情况就会变为通有的情况，而模型的参数通常是只能近似地确定的．

然而也有这样的情况，其中自然需要研究非通有的情况．这就是，研究的不是单个对象(例如一个向量场)，而是一族含有某些参数的对象．

为了更好地设想这一点，考虑一个函数空间(例如向量场的空间)，其点即是我们的对象．非通有情况相应于此空间的某个余维数为1的超曲面．一点作任意小位移就可离开这个超曲面而到通有情况区域．在奇异情况下，超曲面是通有情况区域的边界(图103)．

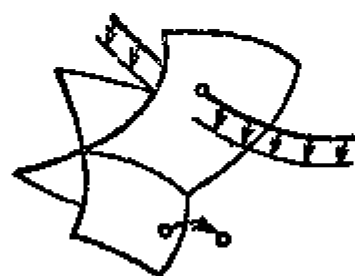


图 103

一个k参数族可表为此函数空间中的k维流形．例如单参数族是此函数空间空间中的曲线(图上的粗线)．

函数空间中的曲线可以穿过奇异情况超曲面．若这个穿过的"角度非0"(横截)，则在族中的小摄动下，穿过的情况仍保持：所有邻近的曲线都在某邻近点穿过奇异情况的超曲面(图中的细线)．

这样，虽然族中每个单一元素可被任意小摄动化为通有情况，但不可能使族中所有元同时为通有情况：在族的形变下，对参数的每一个固定值，可以避免非通有情况，但对参数的某接近值，非通有情况仍然会产生．

在此函数空间的奇异情况超曲面上通常会有奇性(例如在一个超曲面与另一个相交之处，这相应于同时发生两个蜕化(见图103)．在研究一般的单参数族时，可以忽略奇异情况超曲面的这

些奇性．事实上，这些奇点集合在函数空间中的余维数不小于 2．所以函数空间中的曲线经任意小摄动后即可离开这些奇点而在通有点处穿过奇异情况超曲面．所以在单参数族中，我们可能碰到的唯一不可去蜕化，是相应于奇异情况超曲面非奇点的蜕化．这种蜕化称为余维数 1 的蜕化．研究了余维数 1 的蜕化就能够由函数空间的任意通有点走到另一任意通有点，因为函数空间只能用余维数不大于 1 的集合来分割开．

在穿过时，我们一般地必在余维数为 1 的蜕化超曲面上与蜕化曲面相交．研究余维数 1 的奇性就能描述发生在与这些曲面相交时的分枝现象．

在研究通有的 k 参数族时，只有余维数不超过 k 的蜕化不能消除．所有其它蜕化的对象构成此函数空间的余维数大于 k 的集合，而对 k 参数族作任意小形变就可避开它们．

蜕化的余维数越大就越难研究，而一般说来这种研究用处也越小．只有在我们关心的是 k 参数族，而不是个别对象时，研究大余维数 k 的奇性才有道理．这时，自然的研究对象就不是个别对象（例如具有复杂奇点的向量场），而是这样大的族，以致于在族的小形变下，这种类型的奇点不会消失．

Poincaré 的这个简单的想法说明了，在微分方程理论和分析的其它领域中，如此多的研究都是毫无成效的，要提到这些工作是有些危险的．实质上，关于蜕化情况的每一个结果都应该同时有余维数的计算，并指出这种蜕化不可消除的族中有些什么分枝现象．

从这个以 k 参数族的研究为基础的观点看来，我们总是可以略去对余维数为无穷的蜕化的研究，因为对任意有限的 k，任意 k 参数族只要作小的摄动就能摆脱它们．当然蜕化情况作为摄动理论的容易研究的一级近似也还是有用的．

B. 插话：无穷余维数情况

有时也必须研究无穷余维数情况．例如，Hamilton 系统或具有某个对称群的系统就构成动力系统空间中的无穷余维数子流

形．在这种情况下，时常能预先把函数空间缩小，使所研究的蜕化成为有限余维数的（例如限制于 Hamilton 系统或 Hamilton 形变）．

然而缩小函数空间也不一定容易做到．例如考虑偏微分方程的边值问题．这里要讨论函数空间的两个子流形的相交：即解的空间和满足边值条件的函数空间．这两个流形的维数和余维数都是无穷的．分析这个情况需要区分不同的无穷维数与无穷余维数：条件“按某个指定模型作出的一元函数为零”，在函数空间中划分的“（无穷）余维数流形”，比条件“按指定模型作出的二元函数为零”，所划分的小．

需要这样来计算相应于核和余核（由不同维数流形上的函数组成）的无穷余维数的一个最简单的问题就是斜微商问题．在球面（包围一个 n 维球体）上的斜微商问题中，在球面上给出了 n 维包含空间的一个切向量场．要确定一函数在球体中调和，它在场中方向上的微商要等于一个已知的边值函数．

例如，考虑 $n=3$ 的情况．这时通有的场将沿一光滑曲线与球面相切．在此曲线上还有奇点，即场切于曲线之点．在每一奇点附近，场的构造都是标准的：可证对任意 n 和通有的场[1]，在每一边界点附近，场均由一个以下形状的式子给出：

$$x_2\partial_1+x_3\partial_2+\cdots+x_k\partial_{k-1}+\partial_k,\quad k\leqslant n,$$

这里 $\partial_k=\dfrac{\partial}{\partial x_k}$，而且在边界上 $x_1=0$（见C. M. Вишик[1]）．

斜微商问题显然应按以下格式提出．场与边界相切的流形，场与相切流形又相切的流形，把边界分割成维数不同的部分．在某些部分边界上应该给出边值条件，在其它部分上则相反，为使古典解存在，边值函数应满足某些条件．

尽管对斜微商问题已作了大量研究（特别是 В. Г. Мазья 的

1）即对光滑场空间中某个处处稠密的开集中的场．

工作，在他之前还有 М. Б. Малютов, Ю. В. Егоров 和 В. А. Кондратьев 的共同工作)，上面的程序也只在 2 维(边界为圆周)时，才得以实现。

C. 节空间

研究通有的 k 参数族的分枝，实质就是研究函数空间之分为若干块，相应于不同的蜕化，并且略去余维数大于 k 的蜕化。

为了避免函数空间成为无穷维，我们作出一种特殊的有限维逼近的工具：k 阶节流形(节 (jet) 一词是 Ehresmann 引入的)

下面确定一下以后要用的名词与记号。本段和下段的结果都是完全显然的。

令 $f:M^m\to N^n$，是光滑流形的光滑映射(不妨设 M 和 N 是相应维 Euclid 空间的区域)。

定义 两个这种映射称为在 M 上的 x 点 k **阶相切**(图 104)，如果

$$\rho_N(f_1(y),f_2(y))=o(\rho_M^k(x,y)),\ y\to x.$$

这里 ρ 表示某 Riemann 度量，显然 k 阶相切的性质与度量 ρ_M，ρ_N 的选取无关。

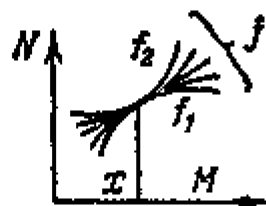


图 104

若两映射在 x 点值相同，则它们在 x 点 0 阶相切。(k 阶)相切是一种等价关系 ($f_1\sim f_2\Rightarrow f_2\sim f_1$，$f_1\sim f_2\sim f_3\Rightarrow f_1\sim f_3$，$f_1\sim f_1$)。

定义 映射 f 在 x 点的 k **阶节**就是与它在 x 点的 k 阶相切的映射类。

记号

$$j_x^k(f)=\{f_1;f_1\text{ 与 }f\text{ 在 }x\text{ 点 }k\text{ 阶相切}\}.$$

点 x 称为此节的**源**，$f(x)$ 称为其**靶**。

在 M 与 N 上的 x 与 $f(x)$ 的点附近选取坐标。这时任意接近于 f 的映射，在接近于 x 点的 k 阶节将由其 k 次 Taylor 和式的系数组定出。所以在固定坐标系以后，k 阶节可以与源的坐标和 k 次 Taylor 和式的系数组等同起来。

例　　映 x 轴为 y 轴的映射 f 在 x 点的 0 阶节由数组 (x, y) 给出，$y = f(x)$。其 1 阶节由 (x, y, p) 给出，$p = df/dx$。

除 k 阶相切外，还有一个等价关系，它给出映射的**芽**而不是节。

定义　　同一点的两个邻域中的两个映射在此点具有**相同的芽**，如果它们在此点的第三个邻域中重合(第三个邻域可能小于前两个之交)。

映射在一点的芽就是上述等价关系下的等价类。

对于芽也和对于映射一样，可以定义其 0 阶节，1 阶节等等。

考虑 M 到 N 的光滑映射(在 M 所有可能点处)芽所有 k 阶节[1]的集合。

定义　　由 M 到 N 的映射的芽的所有 k 阶节集合称为**由 M 到 N 的映射之 k 阶节空间**，记作

$$J^k(M, N) = \text{由}M\text{到}N\text{的映射之}k\text{阶节空间}.$$

例　　$J^1(\mathrm{R}, \mathrm{R})$ 是坐标为 (x, y, p) 的三维空间(见 §3)。

集 $J^k(M, N)$ 有自然的光滑流形构造。事实上，我们是在 M 上一点，以及该点在某映射 f 作用下在 N 中的象点附近选取坐标系的。这时映射 f 的 k 阶节及邻近的节可以由原象点的坐标和映射在此点的 Taylor 级数之一段的系数组给出。我们这样作出了节流形 $J^k(M, N)$ 在此点附近的一个区图，此点就是映射 f 的 k 阶节。

很容易计算节流形的维数。例如，

$J^0(M, N) = M \times N$，$\dim J^0(M, N) = \dim M + \dim N$，

$\dim J^1(M, N) = \dim M + \dim N + \dim M \dim N$。

有自然映射

$$J^{k+1}(M, N) \to J^k(M, N).$$

($(k+1)$ 阶节定义了 k 阶节，因为由 $(k+1)$ 阶相切可得 k 阶相切)。这个光滑映射是一个纤维化。我们得到纤维化所成的链

---

1) 在实光滑情况，考虑芽的节和整个 M 上映射的节都是一样的，因为每一个芽都是一个整体映射的芽。在复情况下，具有给定节的整体光滑映射可能不存在。

$$\cdots \to J^k \to J^{k-1} \to \cdots \to J^1 \to J^0 = M \times N.$$

每一个纤维化的纤维都微分同胚于线性空间，但当 $k>1$ 时没有自然的线性构造(高阶微分没有不变性)。

流形 J^k 在一定意义下是由M到N的光滑映射之无穷维函数空间的有限维逼近。

D. 局部微分同胚的节群与向量场的节空间

考虑节空间 $J^k(M, M)$。 其中有微分同胚的节所成的子流形。这个子流形不是群，因为两个节，只有在一个节的靶是另一个节的源时，才能相乘。

在M中固定一点，并考虑使此点不动的所有M的微分同胚的芽，它们的k阶节组成的一个群。

定义 保持 x 不变的 M 的微分同胚芽的k阶节成群，称为流形M在点x的局部微分同胚的k阶节群，记作 $J_x^k(M)$。

例 局部微分同胚的1阶节群同构于一般线性群：$J_x^1(M^m) = \mathrm{GL}(\mathbf{R}^m)$。

当 $k>1$ 时，可得更复杂的 Lie 群，因为k阶节决定 $k-1$ 阶节，故有映射的链

$$\to J_x^k(M) \to J_x^{k-1}(M) \to \cdots \to J_x^1(M) = \mathrm{GL}(\mathbf{R}^m).$$

易见这些映射(舍去 Taylor 多项式的k次项的映射)是同态， 其核是可换群。例如令 $m=1$ 即有：

◀ 若 $f(x)=x+ax^k(\mathrm{mod}(x^{k+1}))$，$g(x)=x+bx^k\cdot(\mathrm{mod}x^{k+1})$，则$(f\circ g)(x)=x+ax^k+bx^k(\mathrm{mod}x^{k+1})$。▶

流形M上的向量场是切丛 $p:TM\to M$ 的截口，即一个映射 $v:M\to TM$，使下式成为可换的

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{v} & TM \\ & \searrow^{1} & \downarrow p \\ & & M \end{array}.$$

向量场的芽，节和节空间的定义只不过是重复上面的定义。

流形M的微分同胚群可以作用在M的向量场空间上，也可作用在M的向量场的k阶节空间上。

流形M上一点的局部微分同胚群可作用在M之向量场在该点的$k-1$阶节空间上；这个作用是线性的。

例 令 $y=a_1x+a_2x^2+\cdots$ 是0点的局部微分同胚的2阶节。场 $v(x)=v_0+v_1x+\cdots$ 的1阶节的象可由下式给出：$w(x)=w_0+w_1x+\cdots$，其中 $w_0=a_1v_0$，$w_1=a_1v_1a_1^{-1}+2a_2a_1^{-1}v_0$。

◀将方程 $\dot{x}=v(x)$ 用坐标 y 表出即得此式。▶

E. 弱横截性定理

归结为通有形式可能性的证明，常常可以用某些标准的(而且是显然的)横截性定理代替。下面将给出最有用的横截性定理的提法与证明概要。横截性定理主要用于节省力气：在每一个具体情况下，很容易证明相应的具体论断。

定义 线性空间L的两个线性子空间X与Y称为横截的，如果它们的和是全空间：

$$L=X+Y.$$

例如，三维空间中两个交角非0的相交平面是横截的，而两条直线则不然。

令A, B是光滑流形，而C是B的子流形(这里和以下，流形都指无边流形)。

定义 映射 $f:A\to B$ 称为在$a\in A$点横截于C，如果：或者$f(a)$不在C上，或者C在$f(a)$点的切平面和A在a点切平面的像为横截(图105)；即

$$f_*T_aA+T_{f(a)}C=T_{f(a)}B.$$

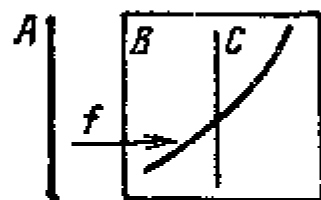


图 105

定义 映射 $f:A\to B$ 称为横截于C，如果它在原象流形的任意点都横截于C。

例如，一条直线嵌入在三维空间中，当且仅当与另一直线不相交时，才横截此空间另一于后者。

注 直线到平面的映射可能并不横截于平面上原有的直

线，即令映射的象是原有直线的法线（因为切空间的象与象的切空间并不是一回事）.

还要注意，若 $f: A \to B$ 横截于 C，则 C 在 A 中的原象是一光滑子流形，而且它在 A 中的余维数等于 C 在 B 中的余维数.

时常遇到这样的情况，即 C 不是光滑子流形而是有奇点的流形.

定义 光滑流形的分层子流形是一组互不相交的光滑流形（层）的有限并，它们适合以下条件：每一个层的闭包是它本身和一些低维层的有限并.

映射称为横截于分层子流形，如果它横截每一个层.

例 设 C 是三维空间中沿一直线相交的两平面的并，而分层将 C 分解为交线与四个半平面. 与 C 横截就是横截于每一个平面以及交线. 例如横截于分层流形 C 的曲线不与 C 的奇异性直线相交.

定理 设 A 是紧流形而 C 是 B 的紧子流形. 这时，横截于 C 的映射 $f: A \to B$ 在所有充分光滑的映射 $A \to B$ 的空间中，构成一个处处稠密的开集（映射 f 的近似，定义为给出 f 的函数及其（直到充分高的）r 阶导数的近似）.

这个定理称为弱横截性定理. 它的结论意味着，通过小的摄动可把不横截于某个固定子流形的映射变为横截的（图 106）. 如果出现了横截性，它在小的摄动下仍会保持.

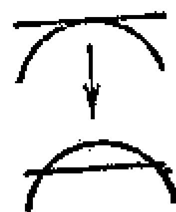


图 106

◀考虑一个特例 B 为线性空间：$B = \mathbf{R}^n$，而 C 为其子空间 $\mathbf{R}^{n-k}$.

把 B 写为两个维数互补的子空间的和：$B = C + D$，$C = \mathbf{R}^{n-k}$，$D = \mathbf{R}^k$. 将 B 沿 C 投影到 D 上，记此投影为 π. 考虑映射 $\pi \circ f: A \to D$.

点 0 当且仅当映射 $f: A \to B$ 不横截于子流形 $C \subset B$ 时，才是 f 的临界值. 由 Sard 引理（§10），D 的几乎所有点都不是映射 $\pi \circ f$ 的临界值. 假设 ε 是 D 中的点，但不是 $\pi \circ f$ 的临界值. 令

$f_\varepsilon(a)=f(a)-\varepsilon$，我们可构造映射 $f_\varepsilon: A\to B$，它横截于 C。因为 ε 可以选得任意小，所以横截映射的处处稠密性在此特例下得到证明。开性可以由隐函数存在定理得到。一般情况可以化为这个特例。▶

注 若 C 非紧，则一般说来，“开性”需要用“可数多个开集之交”代换。

例 1 B 为环面，C 是稠密的环绕线，A 是圆周。

例 2 令 B 为平面，A 是嵌入在其内的圆周，C 是 A 的切线(不包括切点)。嵌入横截于 C，但是存在着任意接近 C 的不横截映射。

为了使所有由紧流形 A 到 B 且横截于 C 的映射构成一个处处稠密的开集，我们只需将 C 的紧性改为：B 的每一点都有一个邻域，使得(邻域，邻域与 C 之交)微分同胚于 $(\mathbb{R}^b, \mathbb{R}^c)$，或微分同胚于 $(\mathbb{R}^b$，空集)。

若 A 非紧，则对映射空间赋以“精细拓扑”是很方便的。在此拓扑中，映射 $f: A\to B$ 的邻域定义如下。在节空间 $J^k(A, B)$ (k 为任意的)中，固定一个开集 G。k 节属于 G 的 C^∞ 映射 $f: A\to B$ 的集合规定为精细拓扑的开集。以这些非空开集为邻域基，即给出无穷可微映射空间中的精细拓扑。

这样，精细拓扑中两个映射近似的概念意味着这两个映射(及其任意阶导数)“在无穷远处”可以很快任意地接近；特别地，充分近于 f 的映射的图象也位于 f 图象的邻域内，该图象“在无穷远处”任意快地变窄。

由此可知，精细拓扑中序列的收敛必从某一项起在某紧集之外完全重合。然而某一映射在精细拓扑的任一邻域中必含有与它处处不等的映射。

如果在精细拓扑意义下理解开与处处稠密，则横截性定理对非紧的 A 也成立(为使结论中的开性为真，C 应为紧的，或为满足上述条件的)。

横截性定理显然可以推广到分层子流形 C。但这时定理不能保证横截映射成为处处稠密的开集，而只能是可数多开集的处处稠密交。

要使横截于分层流形的映射成为处处稠密开集，只需分层满足下面的补充条件：所有横截于一个低维层的嵌入必在此低维层的某个邻域中横截于邻接于它的较高维层。

例 1 令 C 是线性空间中有限个平面的并，它以通常方式分层(例如 $\mathbb{R}^3$ 中一对相交平面)。对 $\mathbb{R}^1$ 横截意味着对包含它的 $\mathbb{R}^2$ 横截，故条件满足。

例 2 　令 C 是 $\mathbf{R}^3$ 中的锥 $x^2 = y^2 + z^2$。分层即把 C 划分为原点和两个半锥．不难验证，上述条件也成立．

例 3. 　令 C 为 $\mathbf{R}^3$ 中的 Whitney 伞形面 $y^2 = zx^2$(图 107)[1]．[这个分层流形 $z \geqslant 0$ 的部分是映射 $\varphi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3, x = u, z = v^2, y = uv$ 的象．Whitney 证明了：(1) 在小扰动下，奇点的类型(除相差 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{R}^3$ 的微分同胚外)不变；(2) 这是唯一的在小扰动下不变(除自交线外)的由二维到三维流形的映射奇异性，其它奇异性在小扰动下都会分裂为几个这样的奇异性]．由对奇异直线 $x = y = 0$ 的横截性得不出对接近于此直线的曲面正规点的横截性(平面 $z = 0$ 横截此直线但不横截曲面)．

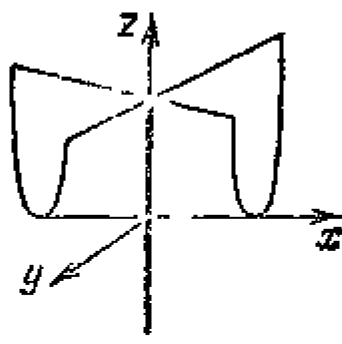


图 107

如果 C 的分层满足以下的条件：

横截低维层 $\Longrightarrow$ 横截高维层，

则可如下得出对整个分层的横截性．

(1) 最低维层是光滑的；可应用通常的定理．(2) 在最低维层的邻域中，对所有的层和接近于已给映射的所有映射可得横截性[2]；(3) 从整个包含流形中除去最低维层的邻域之闭包，再转到下一个维数的层．

例 　令 B 为线性映射 $b:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ 的空间，C 为非最大秩算子的集合．秩为 r 的算子构成一个光滑子流形，在 B 中余维数为 $(m-r)(n-r)$．将 C 分为不同秩算子的流形，就给出 C 的一

---

1) 这个伞形面包括伞柄，即 z 轴(如图 107 粗线所示)．

2) 这是证明中的最精微处，并且用到解析性．——英译者注

个分层.

映射 $f:A\to B$ 是由 $\mathbf{R}^m$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的线性算子族，它光滑地依赖于 A 中之点(作为参数)。流形 A 称为此族的基。横截性定理立即给出以下的结论.

推论 在 $m\times n$ 的光滑矩阵族空间中，横截于非最大秩矩阵的分层流形 C 的族处处稠密.

特别是相应于秩为 r 矩阵的参数，对于通有的族(即对族空间中可数多个开集的处处稠密交中的族)，在族的基中构成一个余维数为 $(m-r)(n-r)$ 的光滑子流形.

例如，在 2×3 矩阵的五参数通有族中，在参数空间的一个三维光滑子流形上秩下降为 1，而在参数空间的任一点上均不为 0；若对一已给族不是这样，则用任意小的形变可把它变成通有的族.

F. Thom 横截性定理

Thom 横截性定理是弱横截性定理的推广，其中节空间的子流形起了子流形 C 的作用.

对每一个光滑映射 $f:M\to N$，我们都可作它的“k 阶节扩张” $\hat{f}:M\to J^k(M,N)$，$\hat{f}(x)=J_x^k(f)$ (即对一点 $x\in M$，作 f 在 x 的 k 阶节)。

定理 令 C 为空间 $J^k(M,N)$ 的子流形，则 k 阶节扩张横截于 C 的映射 $f:M\to N$ 所组成的集合，是由 M 到 N 的光滑映射空间中可数多个开集的处处稠密交.

这个定理意味着，用小摄动可将光滑映射变到不仅对象空间任意子流形为通有的，即令对任意有限阶导数加上的任意条件也如此.

注 令 $k=0$，就可由上定理得弱横截性定理.但由弱定理直接得不出强定理，理由如下：可将弱定理用于 $\hat{f}:M\to J^k$ 而得一接近 $\hat{f}$ 横截 C 的映射，但一般地，它不是由 M 到 N 映射的 k 阶节扩张.

Thom 横截性定理指出，可以在较小的形变类中作横截形变：可以限于在 k 阶节扩张空间中作 k 阶节扩张形变，而不必用 $M\to$

J^k 的所有切口的空间. 所以这个定理意思是,可积性条件(M 到 N 映射的 k 阶扩张当然会满足此条件,但 $M \to J^k$ 的一般切口不变)不影响横截性.

◀定理的证明的实质是归结为 Sard 引理,这和弱横截性定理一样. 基本的差别在于: 不是在映射 $f_\varepsilon = f - \varepsilon$ 的类中作横截形变,而是在更广的多项式形变类 $f_\varepsilon = f + \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_r e_r$ 中作,这里 e_i 是次数不高于 k 的一切可能的向量单项式.

引理 1 考虑光滑流形 A 与 E 的直积到光滑流形 B 的光滑映射 $F: A \times E \to B$.

把 F 看作是由 A 到 B 的映射类 F_ε, ε 是 E 中的点视为 F_ε 参数. 若 F 横截于 B 之子流形 C, 则相应于 F 的类 $F_\varepsilon: A \to B$ 中几乎所有元都横截于 C.

◀考虑 $F^{-1}(C)$. 由隐函数定理,它是 $A \times E$ 的子流形. 考虑它沿 A 到 E 的投影. 由 Sard 定理几乎所有值均非临界值. 令 ε 为非临界值. 这时 F_ε 横截于 C (因为 F 横截于 C, $A \times \varepsilon$ 横截于 $F^{-1}(C)$. ▶

引理 2. 令 f 为 $\mathbf{R}^m$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的光滑映射. 在 $\mathbf{R}^m$ 与 $\mathbf{R}^n$ 中固定坐标系,并考虑由直积 $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^r$ 到映射的 k 阶节空间 $J^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ 的映射

$$(x, \varepsilon) \longmapsto (j_x^k f_\varepsilon),$$

$f_\varepsilon = f + \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_r e_r$. $e_1, \cdots, e_r$ 是 $x \in \mathbf{R}^m$ 点的坐标的不超过 k 次的单项式和 $\mathbf{R}^n$ 的基向量的一切可能的乘积.

这映射没有临界点(从而横截于 k 阶节空间的一切子流形).

◀ J^k 中的坐标就是 $x \in \mathbf{R}^m$ 的坐标以及节在此点的次数直到 k 在内的 Taylor 系数. 适当选取系数 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$, 可使向量多项式 $\varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_r e_r$ 在事先指定的任意点具有任意事先指定的(直到 k 阶在内的) Taylor 系数. 由此立即可得引理. ▶

令 C 为 $B = J^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ 的光滑子流形. 将引理 1 (其中,令 $A = \mathbf{R}^m$, $E = \mathbf{R}^r$, $F(x, \varepsilon) = j_x^k f_\varepsilon$) 用于引理 2 的映射. 由引理 1, 对几乎所有的 ε, 映射 $F_\varepsilon = F(\cdot, \varepsilon)$横截于 C. 取 ε 充分小,

即得(在 $\mathbf{R}^m$ 的任意有限部分)任意接近 f 的映射 $f_\epsilon:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$,其 k 阶节扩张横截于 C。这样，由局部构造过渡到整体构造(即将 $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{R}^n$ 换成 M, N) 将不会产生任何麻烦。▶

G. 例：向量场复杂奇点的分解

作为横截性定理的应用，我们考虑通有的向量场会有什么样的奇点这一问题。

定义 向量场 v 的奇点 x 称为非蜕化的，如果场在此奇点的线性部分算子是非蜕化的。

由横截性定理可得

推论 在紧流形上的光滑向量场的函数空间中，一切仅具有非蜕化奇点的(从而为孤立的)场,构成一个处处稠密开集。

◀奇点是向量场的 0 阶节空间的一个光滑流形 (0 切口)的原象。奇点的非蜕化性意味着场的 0 阶节扩张横截于此流形。▶

这样，蜕化奇点在任意小摄动下将分解为非蜕化的奇点。

例 考虑"鞍点-结点"型奇点:

$$\dot{x}=x^2,\qquad \dot{y}=-y.$$

在摄动 $\dot{x}=x^2-\varepsilon$, $\dot{y}=-y$ 下,鞍点-结点分解为两个奇点：一个鞍点和一个结点.

这样,便产生了一个问题：在小摄动下,已知奇点能分解为多少个奇点？正如常有的那样(例如在代数方程理论中)，这问题可以自然地在复域中得到解决.

定义 复杂奇点在小摄动下分解的非蜕化(复)奇点个数称为奇点的重数.

注 严格地说,重数定义如下：(1) 固定奇点在复空间中的充分小邻域；(2) 这个邻域决定摄动的大小；(3) 对摄动后的场计算该已知点邻域中的奇点个数。

下面,我们将以 Newton 图的语言来给出奇点重数的公式(А. Г. Кушниренко; Д. Н. Бернштейн; А. Г. Хованский)。

令 $f=\sum f_m x^m$ 是变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的标量形式幂级数 ($x^m=$

$x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}$)。考虑具有非负坐标 m_k 的整数格点的卦限。

记此卦限为 $\mathbf{Z}_+^n$。

定义 级数 f 的**支集**,是使 $f_m \neq 0$ 的 m 的集合,$m \in \mathbf{Z}_+^n$,记作

$$\operatorname{supp} f = \{m \in \mathbf{Z}_+^n : f_m \neq 0\}.$$

定义 对级数 f 以支集为顶点在 $\mathbf{R}_+^n$ 中作平行于 $\mathbf{Z}_+^n$ 的实线性空间中的卦限,这些卦限并集的闭包称为 f 的 Newton **多面体**,并记作

$$\Gamma_f = m + \mathbf{Z}_+^n, m \in \operatorname{supp}_f \text{ 并集的凸包.}$$

若一个 Newton 多面体与一切坐标轴均相交,则称它为**适当的**.

定理 设有 n 个适当的 Newton 多面体 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$. 考虑向量场 $v_1\partial/\partial x_1 + \cdots + v_n\partial/\partial x_n$, 分量 $v_1, \cdots, v_n$ 的 Newton 多面体即 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$. 这时向量场的奇点 0 的重数 μ 不小于下面定义的 Newton 数 $\nu(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$,而且对几乎所有的分量具有已给 Newton 多面体的场(即在分量具有已给 Newton 多面体的场空间中,除去一个超曲面外的所有场),二者相同.

注 多面体的适当性条件并非限制,因为可以证明,只需加上充分高次的项就可以不改变重数(只要重数有限)而使它适当.

为了定义适当的 Newton 多面体组的 Newton 数,我们需要混合体积的概念.

设 Γ 为适当的 Newton 多面体. 我们用 $V(\Gamma)$ 表示,在正卦限 $\mathbf{R}_+^n$ 中,界于原点和多面体 Γ 的边界(非凸)区域的体积.

令 Γ_1, Γ_2 为两个适当的 Newton 多面体. 其算术和(即 Γ_1 与 Γ_2 一切向量的和所成的集合)记为 $\Gamma_1 + \Gamma_2$, 此和也是适当的 Newton 多面体.

这样,适当的 Newton 多面体组成一个可交换半群. 由此半群,可用通常方法,作出一个群(称为 Grothendieck 群):其元素是 Newton 多面体的形式差 $\Gamma_1 - \Gamma_2$, 而且定义,当且仅当 $\Gamma_1+\Gamma_4=\Gamma_2 + \Gamma_3$ 时, $\Gamma_1 - \Gamma_2 = \Gamma_3 - \Gamma_4$.

所作的群也定义一个实数域上的线性空间: 若 λ 为正数, 则

定义 $\lambda\Gamma$ 为由 Γ 作出的以 0 为中心，λ 为相似系数的位似的多面体．体积 $V(\Gamma)$ 可唯一地拓展到此线性空间上而成为一个 n 次形式(这个不甚显然的事实留给好奇的读者作为练习)．

每一个 n 次形式都可唯一地表为一个对称的 n 线性形式在其变元重合时的值；例如

$$a^2 = ab|_{a=b},\quad ab = ((a+b)^2 - a^2 - b^2)/2.$$

定义 多面体组 $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$ 的混合 (Minkowski) 体积，即此对称 n-线性形式在 $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$ 上的值，这个 n-线性形式当 $\Gamma_1 = \cdots = \Gamma_n = \Gamma$ 时，为 $V(\Gamma)$．混合体积记作 $V(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$．

例 在平面情况，$n = 2$，且 (Γ_1, Γ_2) 的混合体积 $V(\Gamma_1, \Gamma_2) = [V(\Gamma_1 + \Gamma_2) - V(\Gamma_1) - V(\Gamma_2)]/2$．

定义 Newton 数 $\nu(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$ 定义为

$$\nu(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n) = n!V(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n).$$

例 设二维情况下，Γ_1，Γ_2 以直线为界，Γ_1 交坐标轴于点 $(a_1,0)$，$(0,b_1)$；Γ_2 交轴于 $(a_2,0)$，$(0,b_2)$ 这时，$\nu(\Gamma_1,\Gamma_2) = \min(a_1b_2, a_2b_1)$．因此奇点重数几乎恒为

$$\mu = \min(a_1b_2, a_2b_1)$$

§ 30. 依赖于参数的矩阵和减量图的奇性

我们这里来考察线性空间自同态族的标准形式问题，作为研究向量场的奇点分枝的预备．

A. 含参数矩阵的标准形式问题

若一矩阵有重固有值，则化它为 Jordan 标准形是一个不稳定的运算．事实上，若矩阵有重固有值，则任意小的变化都会改变其 Jordan 标准形．所以若只是近似地知道一个矩阵，则在有重固有值时，将它化为 Jordan 标准形实际上是不可能的．这样作也是不必要的，因为通有的矩阵没有重固有值．

当我们关心的不是单个矩阵而是含参数的矩阵族，则重固有值的出现不可能用小摄动来消除。这时虽然可以把族中每一个单独的矩阵化为 Jordan 标准形，但这个标准形以及化约时所用的变换都是跳跃地依赖于参数的。

于是出现了一个问题，一个光滑(为确定起见设为全纯地)依赖于参数的矩阵族，可以用光滑(全纯)依赖于参数的坐标变换化为什么样的(最简单的)形状呢?

把 n 阶复方阵集合看成 n^2 维线性空间. 矩阵的相似关系把整个空间 $\mathbf{C}^{n^2}$ 分解为一些流形(线性群的轨道): 若两个矩阵有相同的固有值与相同的 Jordan 方块的阶数，则它们处在同一轨道上。由于固有值的关系，这个分解是连续的。作为一个粗糙的模型，可以想像三维空间分解为流形 $x^2+y^2-z^2=C$ 的分层(图 108)。

矩阵族可由族中参数的空间到矩阵空间 $\mathbf{C}^{n^2}$ 的映射来给出。事实上，我们可以从所有的矩阵族中，选取到一些族，其它族只要通过一个光滑依赖于参数的坐标变换(以及参数的光滑变换)，就可归结于它们.这些族称为遍有形变(精确定义见下文).参数个数是尽可能最小的遍有形变称为最小遍有的。

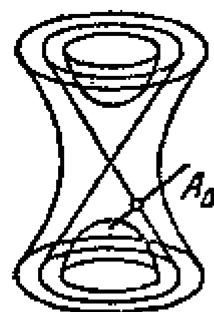


图 108

所以，最小遍有形变就是具有参数个数尽可能小的标准形式，而在化约到它的过程中可以保持对参数的光滑依赖性.

例 若一个对角矩阵的一切固有值均互异，则可取所有对角矩阵族(以固有值为参数)，为其最小遍有形变。

下面给出任意矩阵的最小遍有形变.

B. 遍有形变

定义 矩阵族就是一个全纯映射 $A: \Lambda \to \mathbf{C}^{n^2}$ 为. Λ 是某参数空间 $\mathbf{C}^l$ 中原点的邻域. 族 A 在 0 点的芽称为矩阵 $A(0)$ 的形

变.

矩阵 $A(0)$ 的形变 A' 称为等价于其形变 A，如果存在单位矩阵的形变 C，使得

$$A'(\lambda)=C(\lambda)A(\lambda)(C(\lambda))^{-1}.$$

令 $\varphi:(M,0)\to(\Lambda,0)$ 为一全纯映射 $(M\subset\mathbf{C}^m,\Lambda\subset\mathbf{C}^l)$.

定义 A 在映射 φ 下诱导出的族 φ^*A 是

$$(\varphi^*A)(\mu)=A(\varphi(\mu)),\qquad \mu\in M.$$

矩阵 $A(0)$ 的诱导形变 φ^*A 也用上式定义.

定义 矩阵 A_0 的形变 A 称为遍有的，如果 A_0 的任一形变 A' 均等价于 A 所诱导出的形变. 遍有形变称为万有的，如果诱导映射 φ 由 A' 唯一决定. 遍有形变称为最小遍有的，如果参数空间的维数对于遍有形变是最小的.

例 设对角矩阵的对角线元为 $(\alpha_i+\lambda_i)$，α_i 是彼此互异的，λ_i 是形变参数. 则此矩阵是矩阵 (α_i) 的遍有、万有与最小遍有形变.

一切矩阵的族 $\mathbf{C}^{n^2}$ 是此族中任一矩阵的 n^2 参数遍有形变. 然而一般说来它既非万有的又非最小遍有的.

下面的定理给出任一矩阵的最小遍有形变的维数. 令 α_i 表 A_0 的固有值，$n_1(\alpha_i)\geqslant n_2(\alpha_i)\geqslant\cdots$ 表示 α_i 所属 Jordan 方块的阶数(从最大的排起).

定理 1 矩阵 A_0 的遍有形变参数的最小个数是

$$\sum_i[n_1(\alpha_i)+3n_2(\alpha_i)+5n_3(\alpha_i)+\cdots].$$

最小遍有形变选择的方法很多. 特别地，以下定理所讲的三个标准形式都是化为上三角 Jordan 标准形的矩阵的遍有形变.

定理 2 令 A 为由 $\mathbf{C}^n$ 到 $\mathbf{C}^n$ 的线性算子族，且它全纯地依赖于参数 $\lambda\in\mathbf{C}^l$. 假设当参数 λ 取某值 λ_0 时，$A(\lambda_0)$ 的固有值为 α_i，相应 Jordan 方块的阶数是

$$n_1(\alpha_i)\geqslant n_2(\alpha_i)\geqslant\cdots.$$

这时必存在 $\mathbf{C}^n$ 上的全纯依赖于参数 λ 的基底（λ 在 λ_0 的某

邻域中变动)，使 $A(\lambda)$ 在其中是分块对角矩阵，形如

$$A_0+B(\lambda),$$

A_0 是算子 $A(\lambda_0)$ 的上三角 Jordan 矩阵，$B(\lambda)$ 是分块对角矩阵，其各块相应于 A_0 的各个固有值。

相应于固有值 α_i 的方块 B_i 的元素，除在图 109 上所标的位置外全为 0，而在这些位置上是 λ 的全纯函数。

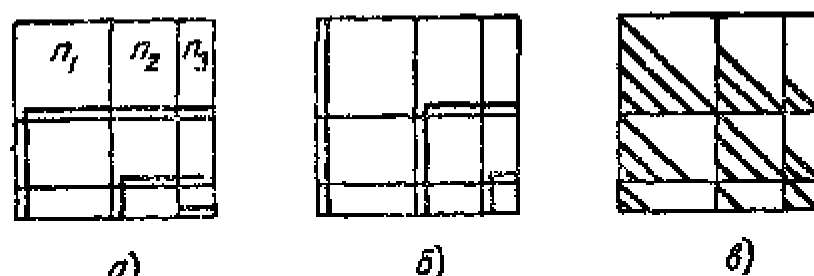


图 109

图 109 上给出了三个标准形。前两个非零元素个数为 $n_1(\alpha_i)+3n_2(\alpha_i)+\cdots$；第三个每一斜线上元素相等。若视 B_i 的这些已标出的元为独立的，即得 A_0 的最小遍有形变；三个情况下独立元素个数均为 $\sum\limits_i[n_1(\alpha_i)+3n_2(\alpha_i)+\cdots]$。前两个标准形式的优点在于其中非 0 元素个数最小。另三个形式的优点在于遍有形变与相应轨道的正交性(在矩阵按元素计算的数量积的意义下)。

C. 遍有性的证明

◀设 $A:\Lambda\to\mathbf{C}^{n^2}$ 是矩阵 $A_0=A(0)$ 的含参数 $\lambda\in\Lambda$ 的形变，而且 $A(\lambda)$ 横截于(A_0 在坐标的线性变换群作用下的轨道) C. 设形变参数的个数为最小(即等于轨道在一切矩阵空间 $\mathbf{C}^{n^2}$ 中的余维数)。这种形变称为最小横截形变。

引理 1 最小横截形变 A 必为最小遍有的。

为证明这个引理，需要以下的

定义 矩阵 u 的中心子即一切与 u 可交换的矩阵集合，记作：

$$Z_u = \{v:[u,v]=0\},\ [u,v]=uv-vu.$$

任一 n 阶矩阵的中心子都是 n 阶矩阵空间 $\mathbf{C}^{n^2}$ 的线性子空间。

令 Z 为 A_0 的中心子.过单位矩阵 e 作非蜕化矩阵空间中的光滑曲面，使它横截于 $e+Z$，其维数即中心子的余维数（亦即可能的最小维数）.

记此曲面为 P，并且考虑映射

$$\Phi:P\times \Lambda\to \mathbf{C}^{n^2},\ \Phi(p,\lambda)=pA(\lambda)p^{-1}.$$

引理 2 映射 Φ 在 $(e,0)$ 邻域中是到 $(\mathbf{C}^{n^2},A_0)$ 上的局部微分同胚.

为证引理 2 需要考虑由非蜕化矩阵群到一切矩阵空间 $\mathbf{C}^{n^2}$ 的映射 ϕ: $\phi(b)=bA_0b^{-1}$.

1° ϕ 在单位矩阵处的导映射即 A_0 的交换子:

$$\phi_*:\mathbf{C}^{n^2}\to\mathbf{C}^{n^2},\ \phi_*u=[u,A_0].$$

◀$(e+\varepsilon u)A_0(e+\varepsilon u)^{-1}=A_0+\varepsilon[u,A_0]+\cdots$. ▶

由 1° 可得

2° 矩阵 A_0 的中心子维数等于轨道的余维数,中心子横截面的维数等于轨道的维数:

$$\dim Z=\dim\Lambda,\ \dim P=\dim C.$$

现在在空间 $\mathbf{C}^{n^2}$ 中引入 Hermite 数量积 $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(AB^*)$，矩阵 B^* 是 B 的转置共轭. 相应的数量平方即矩阵元素模的平方和。

引理 3 $\mathbf{C}^{n^2}$ 在 A_0 点的切向量 B 当且仅当 $[B^*,A]=0$ 时垂直于矩阵 A_0 的轨道.

◀轨道的切向量是可以写成 $[X,A_0]$ 的矩阵,B 正交于轨道表示对任意 X 有 $\langle[X,A_0],B\rangle=0$。换言之,对任意 X 有

$$0=\mathrm{tr}([X,A_0]B^*)=\mathrm{tr}(XA_0B^*-A_0XB^*)$$
$$=\mathrm{tr}([A_0,B^*]X)=\langle[A_0,B^*],X\rangle.$$

由于 X 的任意性，这个条件等价于 $[A_0,B^*]=0$。于是引理得证：矩阵轨道的正交补可由其中心子转置共轭而得. ▶

已化为 Jordan 标准形的矩阵的中心子不难写出. 先设矩阵只有一个固有值与一串上三角形 Jordan 方块,其阶数为 $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots$.

引理 4 图 110 形的矩阵(且只有它们)与 A_0 可交换.

图 110 上每条斜线表示一列相等的数,斜线个数就是中心子的维数.



图 110

◀引理 4 可以由直接计算交换子而得(见 Ф. Р. Гантмахер [1], 199—207 页).▶

由引理 4 可知矩阵 A_0 的中心子的维数(即轨道的余维数或遍有形变的最小可能维数)可由公式 $d = n_1 + 3n_2 + 5n_3 + \cdots$ 给出.

若矩阵 A_0 有若干个固有值,则可将 A_0 分为若干方块而相应于各相异的固有值. 这时与 A_0 可换的矩阵将为对角分块矩阵而对每一个相异的固有值均有一个形如图 110 所示的方块. 所以中心子维数(亦即轨道余维数或最小遍有形变的维数)可由前述公式对相异的固有值求和而得.

事实上, ϕ_* 是同维数空间的线性映射,所以核的维数等于象的余维数.

引理 2 的证明. ◀Φ 在 $(e, 0)$ 点对 p 的导数是 ϕ_* 而对 λ 的导数是 A_*. 由上所证, 这些算子分别将 P 在 e 处与 Λ 在 0 处的切空间同构地映为维数不变而彼此横截的空间(对于 P 是轨道 C 在 A_0 处的切空间, 对于 Λ 是横截于此的空间). 所以 Φ 在 $(e, 0)$ 的导数是 n^2 维线性空间的同构. 由反函数定理, Φ 是局部微分同胚. ▶

引理1的证明. ◀视 p, λ 为点 $\Phi(p, \lambda)$ 的坐标. 令 $A': (M, 0) \to (\mathbf{C}^{n^2}, A_0)$ 是 A_0 的任意形变. $\mu \in M$ 为形变参数. 由公式 $\varphi(\mu) = \lambda(A'(\mu))$, 定义 $\lambda = \varphi(\mu)$, 并设 $B(\mu) = p(A'(\mu))$. 于是 $A'(\mu) = B(\mu)A(\varphi(\mu))B^{-1}(\mu)$, 这样, 即证得形变 A 的遍有性.

这个形变基底的最小性是显然的. ▶

可以取形如 A_0+B 的矩阵族为矩阵 A_0 的横截形变，其中 B 属于上述的矩阵 A_0 轨道的正交补. 我们这样得到了矩阵 A_0 的最小遍有形变.

当矩阵 A_0 只有一个固有值时，矩阵 B 形如图 109 的 (c). 每一条斜线上是一列相等的数；参数的个数等于斜线条数并由上面的公式给出.

矩阵 B 中有许多非零元. 可以作出一个最小遍有形变 A_0+B，使其中非零元的个数最小(等于参数个数). 为此在中心子中取一基底：对图 109(c) 中的每一斜线作一个 0-1 矩阵而使 1 全在该斜线上.

轨道的切平面独立的方程组由以下的方程组成：对图 109 的每一条斜线，矩阵的对应元之和为0(引理 3 和 4). 因此，为了得到横截于轨道的族 A_0+B，只需取以下的矩阵为族 B：在图 109 (c) 的每一斜线上，有一个独立参数占据一个位置而其余位置为 0. 可以在每一斜线上取任一位置为非零元. 例如 §30 **B** 的定理 2 的选法就是合适的.

D. 例子

我们用一个上三角 Jordan 矩阵的各方块的行列式的积来记它. 例如 α^2 表示 2 阶 Jordan 方块，$\alpha\alpha$ 表示一个 2×2 矩阵，即单位矩阵的倍数.

§30 **B** 的定理中的第一个标准形式导出下面的最小遍有形变.

(a) 二阶 Jordan 方块 α^2 的遍有(与万有)二参数形变：

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(b) 二阶数量矩阵 $\alpha\alpha$ 的遍有(但非万有)四参数形变：

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

(c) Jordan 方块 α^3 的遍有与万有三维形变：

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

(d) 矩阵 $\alpha^2\alpha$ 的遍有五参数形变：

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}.$$

例如，所有在参数为零时是 Jordan 方块 α^2 的全纯矩阵族，当参数取近于零的值时，可化为标准形式 (1)，其中 λ_1，λ_2 是参数的全纯函数。

在研究许多关于含参数的算子的性态的问题时，上面作出的标准形式使我们能限于考虑特殊的族，即最小遍有形变．分岐图的构造问题就是一个问题．

E. 分枝图

我们将把参数空间 Λ 按矩阵的 Jordan 型的分划，称为矩阵族的分枝图．矩阵族就是由参数空间到矩阵空间的映射 $A: \Lambda \to \mathbf{C}^{n^2}$，因此为了研究分枝图应该研究一切矩阵的空间按矩阵的 Jordan 型划分．在这个划分中，我们把 Jordan 方块维数相同而只是固有值大小不同的矩阵放在一起．因此所得的划分是矩阵空间的有限分层．

这个分层的每一个层由 Jordan 方块的维数的组 $n_1(i) \geqslant n_2(i) \geqslant \cdots$ 决定，n_1 这里共有 ν 个组，它们相应于 ν 个不同的固有值 $(1 \leqslant i \leqslant \nu)$．这种层在 $\mathbf{C}^{n^2}$ 中的余维数 c 比相应轨道的余维数少相异固有值个数，即少 ν：

$$c = d - \nu = \sum_{i=1}^{\nu} [n_1(i) + 3n_2(i) + \cdots - 1].$$

注意单特征根在此和中相应的项为 0．由弱横截性定理即得以下结论：

定理　在 n 阶矩阵族空间中横截于 Jordan 型的层的族组成一个处处稠密的集合.

利用这个定理和 § 30 D 的遍有形变公式即可描述通有族的分枝图. 特别是对参数个数不多的族有以下结果:

(1) 单参数族. 由 $c=1$ 可知矩阵只有一个二重固有值,相应于一个二阶 Jordan 方块. 这个层记作 α^2.

推论　在通有的单参数矩阵族中只遇到单固有值的矩阵,而对参数的个别孤立值也有 α^2 型矩阵(一个 2 阶 Jordan 方块). 若族中有 Jordan 构造更复杂的矩阵, 则可以用族的任意小摄动加以消除.

(2) 二参数族. 当 $c=2$ 时,恰有两个 Jordan 型: α^3 (一个 3 阶 Jordan 方块)和 $\alpha^2\beta^2$ (两个 2 阶 Jordan 方块而固有值不同).

推论　通有的二参数矩阵族的分枝图是如下的曲线, 其仅有的奇点是尖点与自交点(图 111). 尖点相应于一个 3 阶 Jordan 方块的 α^3 型矩阵; 自交点相应于两个 2 阶 Jordan 方块而固有值不同即 $\alpha^2\beta^2$ 型. 曲线上的点相应于一个 2 阶 Jordan 方块. 曲线外的点相应于单固有值的矩阵.

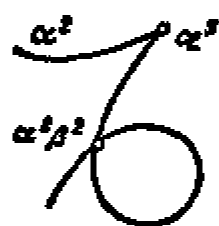


图 111

若族中有更复杂类型的矩阵, 或分枝图有更复杂的奇点,则可用族的任意小摄动加以消除.

(3) 三参数族. 当 $c=3$ 时,有四个层: $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ (三个 2 阶方块), $\alpha\alpha$ (两个 1 阶方块而固有值相同), $\alpha^2\beta^3$ (2 阶 3 阶方块各一个)和 α^4 (一个 4 阶方块).

所以,通有的 3 参数族分枝图的奇点如图 112 所示. α^4 奇点称为燕尾,此曲面方程为 $\Delta(a, b, c)=0$, Δ 是多项式 z^4+az^2+bz+c 的判别式. 严格地说,以上讨论的都是复情况,图 112 上的曲面都应看作复的.

实矩阵的遍有形变曾由 Д. М. Галин[1] 作出. 作法如下:

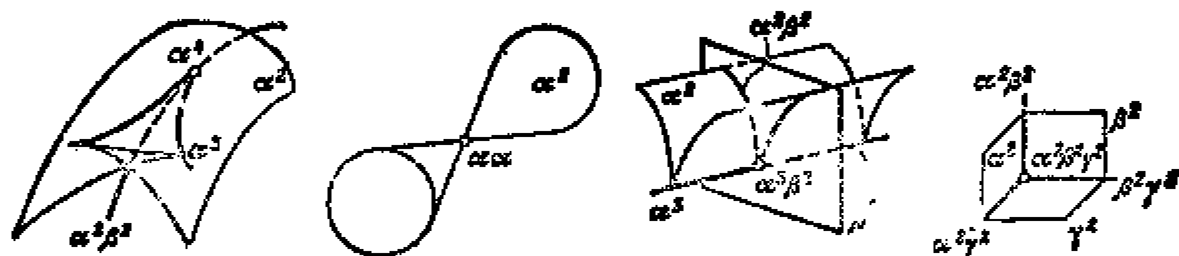


图 112

先设需要求其逼有形变的 $\mathbf{R}^{2n}$ 中实算子有唯一一对复共轭固有值 $x\pm iy$ $(y\neq 0)$，而 Jordan 方块的维数为 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots$，这里 $n_1+n_2+\cdots=n$。于是在 $\mathbf{R}^{2n}$ 的某一个基底下，算子的矩阵形状为具有唯一固有值 $x+iy$ 与 Jordan 方块维数为 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots$ 的复 Jordan 算子 $\hat{A}_0$: $\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$，亦即

$$A_0=\begin{pmatrix} X & -yE \\ yE & X \end{pmatrix}. \tag{2}$$

X 是固有值为 x 的上三角 Jordan 矩阵，其 Jordan 方块的维数是 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots$，$E$ 是 n 阶单位矩阵.

事实上，**可以取复矩阵 $\hat{A}_0$ 的最小的复逼有形变的实化作为实矩阵 A_0 的最小的逼有形变.**

例如，具有两个二阶 Jordan 方块，而固有值为 $x\pm iy$ 的四阶实矩阵的最小逼有形变，可以取为四参数的形变而从复的最小的形变

$$\begin{pmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

实化得出，亦即取为四参数 ρ_1，ρ_2，τ_1，τ_2 形变

$$\begin{pmatrix} x & 1 & -y & 0 \\ 0 & x & 0 & -y \\ y & 0 & x & 1 \\ 0 & y & 0 & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \rho_2 & -\tau_1 & -\tau_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_1 & \tau_2 & \rho_1 & \rho_2 \end{pmatrix},\quad \begin{matrix} z=x+iy, \\ \lambda_k=\rho_k+i\tau_k. \end{matrix}$$

每个实矩阵都可以用实域上的相似变换化为分块对角形，其中相应于每个实固有值都有一个实 Jordan 矩阵，而相应于每对

复共轭固有值则有 (2) 形的方块.

当一个矩阵化为这种形状，若将每一方块代以其最小遍有形变后，即可得到其实的遍有形变(具有最少可能的参数). 因此实的遍有形变最小可能参数个数可由以下公式给出

$$d = \sum_{\lambda} [n_1(\lambda) + 3n_2(\lambda) + 5n_3(\lambda) + \cdots],$$

这里对所有 ν 个固有值(实的和复的)求和.

当 $d - \nu \leqslant 3$ 时，Галин 的工作给出了实矩阵的遍有形变的显式公式和分枝图的表. 为了力学的应用还作出了辛遍有形变和 Hamilton (无穷小辛) 遍有形变(即保持辛性质的形变)的表，见 Д. М. Галин[2].

所得的分枝图有一个应用如下：当研究某个现象时，假设得到了与此不同的另一种分枝图. 这时可能发生以下情况的两种之一：或者，在把这种现象理想化时，忽略了某些本质性的东西，从而定性地改变了分枝图的构造，或者有某些特殊的理由使谱有附加的重数或对 Jordan 分层有非横截性(例如问题的对称性或 Hamilton 性质).

F. 减量图奇点的分类问题

作为矩阵遍有形变的一个应用，考虑以下问题的解. 设有一族线性齐次自治微分方程. 众所周知，当 $t \to +\infty$时，解的渐近性态将由给出这个方程的线性算子实部最大固有值决定. 现问这个实部怎样依赖于参数?

上述实部(加上负号)在工程中称为减量. 所以问题就是研究当系统的参数变化时减量的性态.

参数变化时减量的性态用参数平面(空间)中减量的等值线(面)来描述是方便的. 参数平面上的减量等值线族称为减量图.

减量图的形状对不同的族相差极大；有时减量图会有极复杂的奇性. 然而将可看到，对通有的族只会遇到减量图某些最简单的奇性：更复杂的奇性在小摄动下将会分解.

本节中，我们要描述通有的两参数族的减量图的所有奇性。

在研究系统对参数的依赖时，通有的减量图奇性的分类的用处正如研究相图时通有奇点的分类的用处一样.

我们应警惕减量图中出现非通有奇性的情况. 它可能用系统的特殊对称性来解释，也可能是由于理想化不够（"不适定性"），使得方程中没有考虑到的小效应(例如无线电技术中所谓"寄生通路"(parasitic connection))会使图象起定性的改变.

通有的两参数减量图奇点的分类还包括了通有的三参数线性方程族的稳定区域边界(零减量面)奇点的研究.

所得的结果也可以应用于具有稳定点的光滑依赖于参数的非线性方程组：非线性方程组在该点线性化的减量(作为参数的函数)将只有最简单的奇性(在通有的情况).

但在把所得结果用于非线性方程组时，需要除去稳定性区域边界上相应于零根的那一部分，因为这时稳定点对参数的光滑依赖性失去了. 因此通有的非线性方程组稳定区域边界奇性的描述(以及在这种边界点附近减量图的描述)，都需要进一步研究. 我们将在以下各段回到这个问题上来.

在研究映射的迭代时，以及在研究周期系数方程或周期轨道附近的运动时，固有值模的最大值起了减量的作用. 若此模不是1，则(作为通有的族的参数的函数)其奇性与通有族的减量奇性一样. 所以以后只考虑减量.

在研究上述类型的非线性问题固有值的模时，本段的结果在稳定区域边界之外仍可应用，在边界上那些不以1为固有值的点处亦然.

G 减量图

考虑光滑依赖于参数(即参数空间Λ中的点λ)的 Euclid 空间$\mathbf{R}^{n2}$的线性算子族A：

$$A(\lambda): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

定义 族 $A(\lambda)$ 的增量[1]即参数的函数 f，它在 λ 点的值，即算子 $A(\lambda)$ 固有值的最大实部：

$$f(\lambda)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|e^{A(\lambda)t}\|.$$

函数 f 是连续的，但不一定可微．我们的问题是研究通有的两参数族的 f 的奇点，这样可取平面 $\mathbf{R}^2$ 或其上的区域作为参数空间 Λ．

我们称 f 在 λ 平面上的等值曲线为减量图．等值曲线上横向一撇表示坡度方向即 f 减少的方向．换言之，一撇指向稳定性增加的方向．

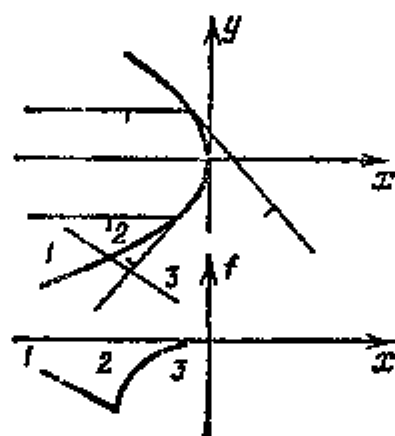


图 113

例 考虑含两参数 (x,y) 的微分方程

$$\ddot{z}=xz+y\dot{z}.$$

相应的方程组的矩阵是

$$A(x,y)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ x & y\end{pmatrix}.$$

减量图见图 113．抛物线 $y^2+4x=0$ 分 (x,y) 平面为两部分．在每一部分中，增量均为光滑函数．在抛物线左侧固有值为复的，且 $f=y/2$．在右方固有值为实且 $f=(y+\sqrt{4x+y^2})/2$．增量的等值线是切于抛物线的射线．

抛物线上各点均为减量曲线的奇点．它们相应于具有 2 阶 Jordan 方块的 A．在由左向右穿过抛物线时，增量由线性地变化变为方根的变化．

很明显，这个奇点不能用小摄动来消除．还有其它不可去奇点；我们的目的是完全地加以列举．

H. 矩阵空间中余维数为 1 或 2 的层

如果一个实的固有值，或一对复共轭固有值[2]具有最大实部，

1）在工程中，当 $f<0$ 时，量 $|f|$ 称为减量；当 $f>0$ 时，它称为增量．

2）这里和以下均设一对共轭复数不是实的．

则增量在所考虑值 λ_0 的附近，是参数的光滑函数。

只有在具有最大实部的固有值不唯一时，才失去光滑性。若干个固有值同时具有最大实部的矩阵组成 n 阶矩阵空间 $\mathbf{R}^{n^2}$ 的闭半代数子簇[1] F. 这个流形的余维数为 1，而其余集合有两个开分量：

D_1. 层 (α). 恰好一个实固有值有最大实部。

D_2. 层 $(\alpha\pm i\omega)$. 恰好一对共轭复固有值具有最大实部。

很容易把 F 分层。最大维数(余维数 1)的层只有以下几种：

F_1. 层 (α^2). 恰有两个相重固有值具有最大实部；这两个固有值为实且相应于二阶 Jordan 方块。

F_2. 层 $(\alpha, \alpha\pm i\omega)$ 三个固有值具有最大实部；一个是实的，另外是一对复共轭的。

F_3. 层 $(\alpha\pm i\omega_1, \alpha\pm i\omega_2)$ 两对不同的复共轭固有值具有最大实部。

很明显，层 F_1, F_2, F_3 都是矩阵空间 $\mathbf{R}^{n^2}$ 的余维数为 1 的正规、光滑、非闭且互不相交的子流形。余集 $F\backslash(F_1\cup F_2\cup F_3)$ 是所有矩阵空间 $\mathbf{R}^{n^2}$ 的余维数为 2 的闭半代数子簇(即，有几个固有值都具有最大实部)。流形 $F\backslash(F_1\cup F_2\cup F_3)$ 的维数最大的层在 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中具有余维数 2，很容易列举如下：

G_1. 层 (α^3) 恰好三个固有值具最大实部，它们都是实的，且相应于 3 阶 Jordan 方块。

G_2. 层 $((\alpha\pm i\omega)^2)$ 两对相重的复共轭固有值都具有最大实部；它们各相应于一个二阶 Jordan 方块。

G_3. 层 $(\alpha^2, \alpha\pm i\omega)$ 四个固有值都具有最大实部；两个实的相应于一个二阶 Jordan 方块；两个复的互相共轭。

G_4. 层 $(\alpha, \alpha\pm i\omega_1, \alpha\pm i\omega_2)$ 五个固有值具有最大实部：一个实的和两对不同的复共轭的。

G_5. 层 $(\alpha\pm i\omega_1, \alpha\pm i\omega_2, \alpha\pm i\omega_3)$ 三对不同的复共轭固有值

---

1) 线性空间的半代数子簇，即由有限多个多项式等式或多项式不等式定义的集合的有限并.

具有最大实部。

层 G_1—G_5 都是所有矩阵空间 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的正规，非闭且互不相交，且余维数为 2 的子簇[1]。余集 $F\backslash(\cup F_i)\backslash(\cup G_i)$ 是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的余维数为 3 的闭半代数簇。

由弱横截性定理（§29），可得

推论　在两参数的通有的矩阵族中，除以上列举的(D_i, F_i, G_i)外，不会遇到其它的同时具有最大实部的固有值组。这些组也只横截地发生。

所以在通有的族中，余维数 1 的固有值组（F_i）在光滑曲线上遇到，其上的奇点只位于参数平面上余维数 2 的固有值组 G_i 上，这个现象又只能发生在参数平面的孤立点上。

曲线段 F_1 与 F_2，若再加上其奇点 G_i，就构成一些曲线，这些曲线将参数平面分划为两类区域：D_1 与 D_2。不难看出，所有曲线段 F_3 都在 D_2 部分中。

此外，点

$G_1(\alpha^3)$ 位于 $F_1(\alpha^2)$ 和 $F_2(\alpha, \alpha\pm i\omega)$ 的连接处；

$G_2((\alpha\pm i\omega)^2)$ 连接着 $F_3(\alpha\pm i\omega_1, \alpha\pm i\omega_2)$；

$G_3(\alpha^2, \alpha\pm i\omega)$ 在 $F_1(\alpha^2)$，$F_2(\alpha\pm i\omega)$和 $F_3(\alpha\pm i\omega_{1,2})$的连接处；

$G_4(\alpha, \alpha\pm i\omega_{1,2})$ 在 $F_2(\alpha, \alpha\pm i\omega)$ 与 $F_3(\alpha\pm i\omega_{1,2})$ 连接处；

$G_5(\alpha\pm i\omega_{1,2,3})$ 连接着 $F_3(\alpha\pm i\omega_{1,2})$。

在图 114 中，我们给出了一个构造的（假想的）例子，此构造是

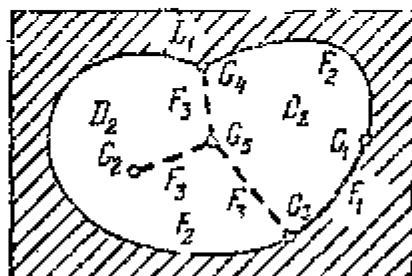


图　114

1) 当 n 充分大时，所有的 D_i，F_i，G_i 都是连通的，但有以下的例外：$n=2$ 时的 D_2 与 F_1，$n=4$ 时的 F_3，G_2，G_3 和 $n=6$ 时的 G_5 各有两个分量

在通有平面的参数族中，由这些曲线形成的。

I. 在余维数 0 或 1 的层附近减量图的构造

在奇点集合 F 的余集上，增量 f 是参数的光滑函数。然而减量图在此余集的某些点处可能有奇点，这就是函数 f 的临界点。

在 F 之外，通有族的增量只有单临界点，即只有以下三种类型的点；但若区分实根 (D_1) 与复根 (D_3)，则有六种类型的点。

D_1^0. 极小　在参数平面的这种点附近，可以取光滑坐标 (x, y)，使增量形为 $f = \text{const.} + x^2 + y^2$.

D_1^1. 鞍点　在适当坐标下，有 $f = \text{const.} + x^2 - y^2$.

D_1^2. 极大　$f = \text{const.} - x^2 - y^2$.

现在研究函数 f 在集合 F 非奇点附近的性态，即在参数平面的曲线 F_i 内点附近的性态。这里应分两种情况：曲线 F_i 的点对于增量(作为曲线上的光滑函数)既可以是非临界点，也可以是临界点。

由横截性定理可知，对于通有族，增量在曲线 F_i 上的限制其临界点只可能是非蜕化的极大或极小。

把这个信息与 § 30 **B** 中关于通有矩阵族的显式公式结合起来，不难得到增量在余维数 1 的层附近的标准形式，如下：

定理　若限制通有族的增量在曲线 F_i 上，则在其非临界点附近，可以在参数平面上选取适当的光滑坐标 (x, y)，使得增量 f 取以下形状的三种之一(图 115)：

情况 F_1^0 (Jordan 方块)

$$f = \text{const.} + y + \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{若 } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

情况 F_2^0 和 F_3^0(简单通过)

$$f = \text{const.} + x + |y|.$$

曲线 F_1^0 与 F_1^0 将实与复根的区域 D_1 与 D_3 分开。增量的等值曲线从实根一侧相切地接近曲线 F_1，而由复根一侧横截于它。对

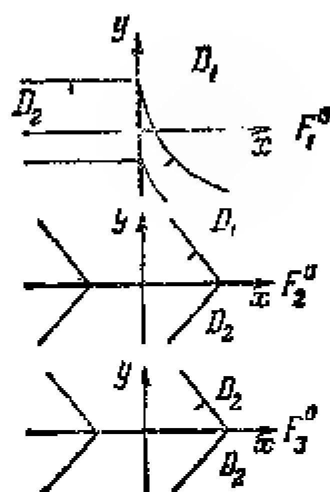


图 115

于曲线 F_2 与 F_3，减量的等值曲线将在 F_2^0，F_3^0 的点处从两侧横截地接近于它。等值曲线与曲线段 F_1 组成的(小于 180° 的)角，在所有情况下，都包含了 f 沿此曲线减少的方向。

定理 在通有族增量限制的临界点附近，可以取坐标 (x, y)，使增量为以下 12 种形状之一(图 116)。

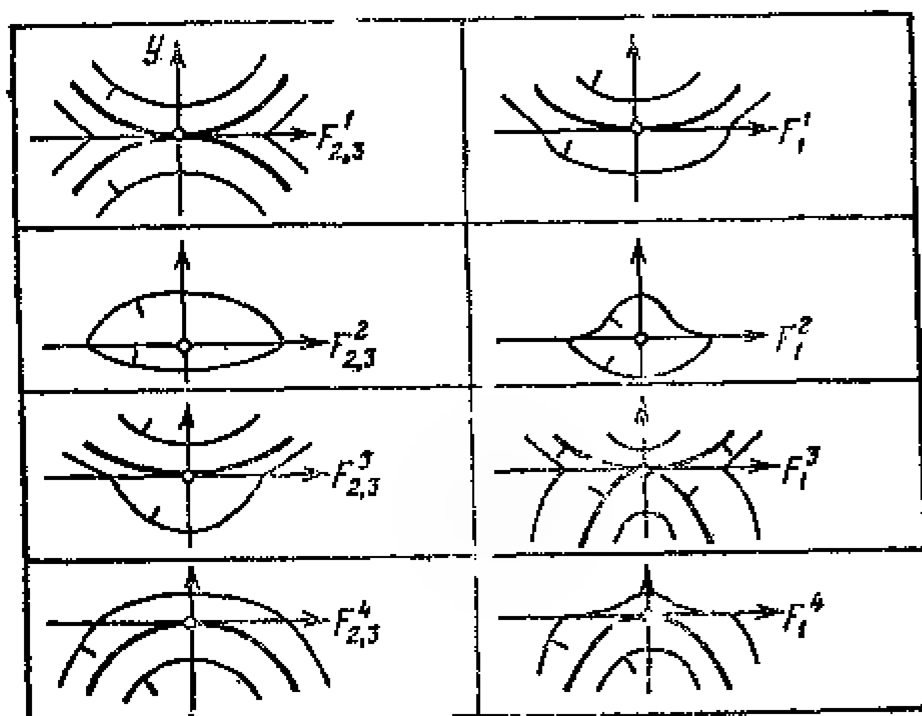


图 116

情况 F_1^k 和 F_3^k，$k = 1, \cdots, 4$（穿过时的条件极值）

$$f = \text{const.} + \varepsilon x^2 + \varphi(y) + |y|, \quad \varepsilon = (-1)^k,$$

其中 $\varphi(y)=ay+\cdots$ 是光滑函数，$a>0$，$a\neq 1$。

由 ε 的两个符号和 a 的两个可能性的组合，可以得到 k 的四个值：

k	1, 2	3, 4
a	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$

奇数 k 相应于条件极大，偶数 k 相应于条件极小。为了得到减量图的形状，只需考虑 $\varphi(y)=ay$ 的情况。这时，f 的等值曲线将由两段抛物线沿 y 轴平移而得。

情况 F_1^k，$k=1,\cdots,4$（具有 Jordan 方块 α^2 的条件极值）：

$$f=\text{const}+\varepsilon x^2+\varphi(y)+\begin{cases}\sqrt{y}, & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

这里 $\varepsilon=\pm 1$，$\varphi(y)=ay+\cdots$ 是光滑函数，$a\neq 0$。

由 ε 与 a 的符号组合，可得 k 的四个值：

k	1	2	3	4
ε 的符号，a 的符号	−−	−+	+−	++

奇数 k 相应于条件极大，偶数 k 相应于条件极小。为了得到减量图的明显的图象，只需考虑 $\varphi(y)=\pm y$ 的情况。

我们的定理断言：在曲线 F 的内点中，除了上述 15 种 F_i^k（$15=3+12$）外，通有的两参数族的增量无其它奇点。如果在某个族中有其它奇点，则用任意小的摄动就可以消除它们。奇点 F_i^k 明显地不可消去。

J. 在余维数为 2 的层附近减量图的构造

在研究通有的两参数族的余维数为 2 的层的奇点时，可以考虑"最非蜕化"的情况，因为任何的蜕化都会增加余维数，而奇点成为不可去的。

把横截性定理和 §30, **B** 中矩阵遍有族的显式公式结合起来，可得增量在余维数为 2 的层附近的以下标准形式。

定理 在通有族的参数平面的每一个余维数 2 的层(用 §30, **H** 的记号: G_i) 的点附近，可取光滑的坐标 (x, y)，使增量取以下 18 种形状(图 117)。

情况 $G_1^{\pm}$ (一个三阶 Jordan 方块)

$$f=\varphi(x, y)+\lambda(x, y),$$

其中 λ 是三次方程 $\lambda^3=x\lambda+y$ 的最大实部，φ 是一个光滑函数，且 $(\partial\varphi/\partial x)(0, 0)=a\neq 0$。

减量图的形状由 a 的符号决定。

$G_1^{\pm}$ 中的"±"分别相应于 $a \gtrless 0$。为了使减量图的形状有一个明显的形象，只需考虑 $\varphi=\pm x$ 的情况。有两条在 $(0, 0)$ 相切的奇点曲线趋向 $(0, 0)$: 即射线 $F_2(y=0, x<0)$ 与半条半立方抛物线 $(4x^3=27y^2, y<0)$。这两个曲线把复共轭根的区域 D_2 (凸域)与实根区域 D_1 分开。当沿着区域 D_1 与 D_2 的边界运动时，

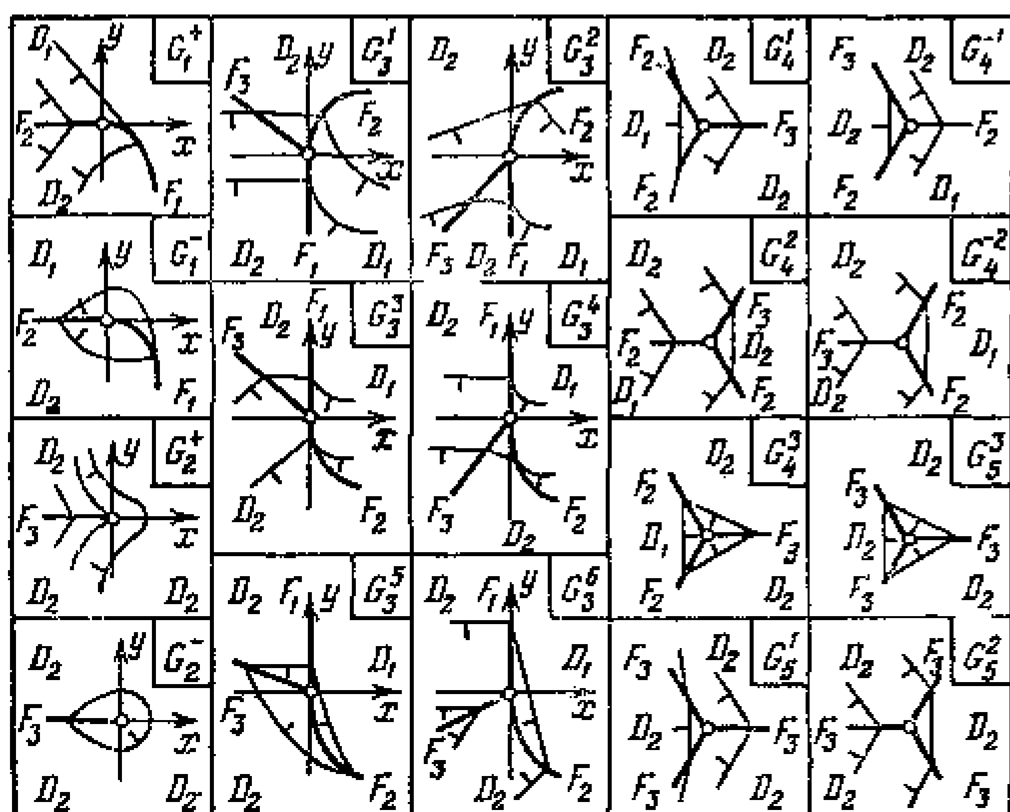


图 117

增量 f 在 $a>0$ 时为单调，而当 $a<0$ 时则在点 G_1^- 处有极小。f 的等值线从 D_1 一侧切于半立方抛物线 F_1。

情况 $G_2^\pm$（一对复的二阶 Jordan 方块）。

$$f=\varphi(x,y)+|\mathrm{Re}\sqrt{x+iy}|.$$

Re 表示实部，φ 是光滑函数，使 $(\partial\varphi/\partial x)(0,0)=a\neq 0$。减量图的形状由 a 的符号决定。

$G_2^\pm$ 中的"±"分别相应于 $a\gtrless 0$。为了得到关于减量图清楚的形象，只需考虑 $\varphi=\pm x$ 的情况，射线 $F_3(y=0, x<0)$ 趋向于点 $x=y=0$（并停止于此处）。$a<0$ 时，f 在点 $G_2^-(x=y=0)$ 有极小，$a>0$ 时，点 $G_2^+(x=y=0)$ 对于函数 f 是拓扑非奇异的。函数 f 的（穿过这点的）等值曲线，有半立方抛物线类型的奇点。

情况 $G_3^k(k=1,\cdots,6$；一个 Jordan 方块中的一对复数相遇）。

$$f=\text{const.}+y+\max\begin{cases}\sqrt{x}\,,\varphi(x,y), & 若\ x\geqslant 0,\\ 0\,,\varphi(x,y), & 若\ x<0.\end{cases}$$

这里 $\varphi(x,y)=ax+by+\cdots$ 是光滑函数，$a\neq 0$，$b\neq 0$ 且 $b\neq -1$。

将 a 的两种可能的符号与 b 的三个可能的变化区间结合起来，即得六种情况对应于 k 的六个值：

k	1	2	3	4	5	6
a 的符号	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
b 的区间	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(-1,0)$	$(-1,0)$	$(-\infty,-1)$	$(-\infty,-1)$

为使减量图的形状有清楚的形象，只需取 φ 为线性函数。有三个光滑射线 F_1，F_2，F_3 趋向原点。F_1 与 F_2 相向而来（且一阶相切），F_3 则由复根 D_2 一侧横截而来。在 G_3^5 时（即 $a<0$，$b<-1$），增量在点 $x=y=0$ 有极小；在其它情况下，点 $G_3^k(k\neq 5)$ 是函数 f 的拓扑非奇点。

情况 $G_5^k(k=1, 2, 3)$（双重通过）

$$f = \text{const.} + x + \max(|y|, \varphi(x, y)),$$

其中 $\varphi(x, y) = ax + by + \cdots$ 是光滑函数，$a < 0$, $b > 0$, $a + 1 \neq \pm b$。

对于 G_5^k，k 的三个值对应于 a 的变化区间：

k	1	2	3
a 的条件	$b-1 < a$	$-b-1 < a < b-1$	$a < -b-1$

为了能直观地看出减量图的形状，只需取 φ 为线性函数。

在每个情况下（$k=1, 2, 3$），都有曲线 F_3 的三个光滑分支横截地趋向点 G_5^k。在最后的情况下，这点是增量的极小，在前两个情况下，它拓扑上不是奇点。在三条射线的第 k 条趋向点 G_5^k 时，增量减少。在其余的射线上它增加。

情况 $G_4^k(k=\pm 1, \pm 2, 3)$（双重通过且有一实根参于）。增量的公式与 G_5^k 相同，但必需按照实根对应于哪一部分，而区分更多的情况。

负数 k 相应于这样的情况，当沿 F_3（在其上有复共轭对相遇）趋向点 G_4^k 时，增量增加。另两条射线是曲线 F_2 的分支。

K. 讨论

考虑以上列举的标准形式，可得到关于减量图的局部或整体构造一般性的结论。首先由以上定理可得

推论　通有两参数族的增量 $f: \Lambda \to \mathbf{R}$ 拓扑等价于只有简单临界点的光滑函数：

这就是 D_1^0, F_1^1, $G_{1,2}^-$, G_3^3, $G_{4,5}^3$ 型的极小点。

点 D_1^1, F_1^2 拓扑等价于鞍点。在极大点（D_1^2）附近，增量是光滑函数。所有其它类型的点，拓扑上都是非奇异的。

由上述推论显然可得关于各类型奇点数的不等式。特别是，若**增量的一个封闭的等值曲线围成一个单联通区域，则区域内** $D_1^{0,2}$,

F_1^2, $G_{1,2}^{-}$, G_3^3, $G_{4,5}^3$ 型点的总数比 D_1^1, F_1^3 型点的总数大 1. 我们还不知道,结论是否可以推广到 $l>2$ 的 l 参数族[1].

由于曲线段 F_1 与 F_2 组成闭曲线,又由对 F_3 的端点处的奇性的描述,可得

推论 若参数空间 A 是闭的二维流形,则 G_1 与 G_3 型的点数奇偶性相同,而 G_2, G_3, G_4, G_5 型点的总数为偶的.

如果取边界横截于 F_i、并且不穿过点 G_i 的紧区域为参数空间 A,则结果将变化如下: G_1 型与 G_3 型点总数奇偶性与边界和 F_1 与 F_2 的交点数奇偶相同,而 G_2, G_3, G_4, G_5 型点总数奇偶性,与边界交 F_3 的交点数奇偶相同.

特别地,对增量的研究使我们能研究通有两参数族参数平面的稳定性边界(即增量为 0 的曲线).由我们的定理可得以下的推论.

推论 通有两参数矩阵族的稳定性边界由在端点处互相横截的光滑弧组成.

注意,稳定性边界的角点按 §30 **I** 和 **J** 的分类可以是 F_1^0 型(二阶 Jordan 方块)点或 F_2^0, F_3^0 型(简单通过)点.稳定性边界的每一段弧因此都可以越过其端点而不失光滑性.这时稳定性边界的每一个闭分量的 F_1^0 与 F_3^0 型角点总数恒为偶的.

还要注意:对两参数族的增量奇点的分析足以用来研究三参数族稳定性的边界.

事实上,余维数为 3 的层的奇点,以及增量在余维数为 0、1,2 的层上限制的奇点,都可以通过族中的小摄动,使它们与稳定性的边界分离.这样,一般族的稳定性边界由若干光滑曲面组成,其奇点或者位于一些曲线上,而稳定性边界沿它们与 F_i 型曲面相交;或者位于稳定性边界与层 G_i 的交点上(后者对于一般的三参数族是曲线).

---

1) 注意,$l=2$ 时通有族增量的奇点和系数为 l 个参数的通有函数的代数方程根的最大实部的奇异性是一样的. $l\geqslant 3$ 时就不是这样了:增量可以有更复杂的奇点.

沿着这种曲线 G_t，我们可以把三参数族看成是两参数族的单参数族(两参数即指横截于 G_t 的断面上的坐标，单参数即指沿 G_t 的坐标 t)。考虑到 §30 **J** 和 **K** 中的标准形式，现在必需设所有常数和任意函数 φ 光滑依赖于 t. 此外，我们可以通有地以函数 $\varphi(x, y, t)$ 为参数 t，这样可得下面的结论。

推论　通有三参数矩阵族稳定性边界的奇点，与通有两参数族增量图的奇点有相同类型[1]. 这些奇点除相差微分同胚[2]外，

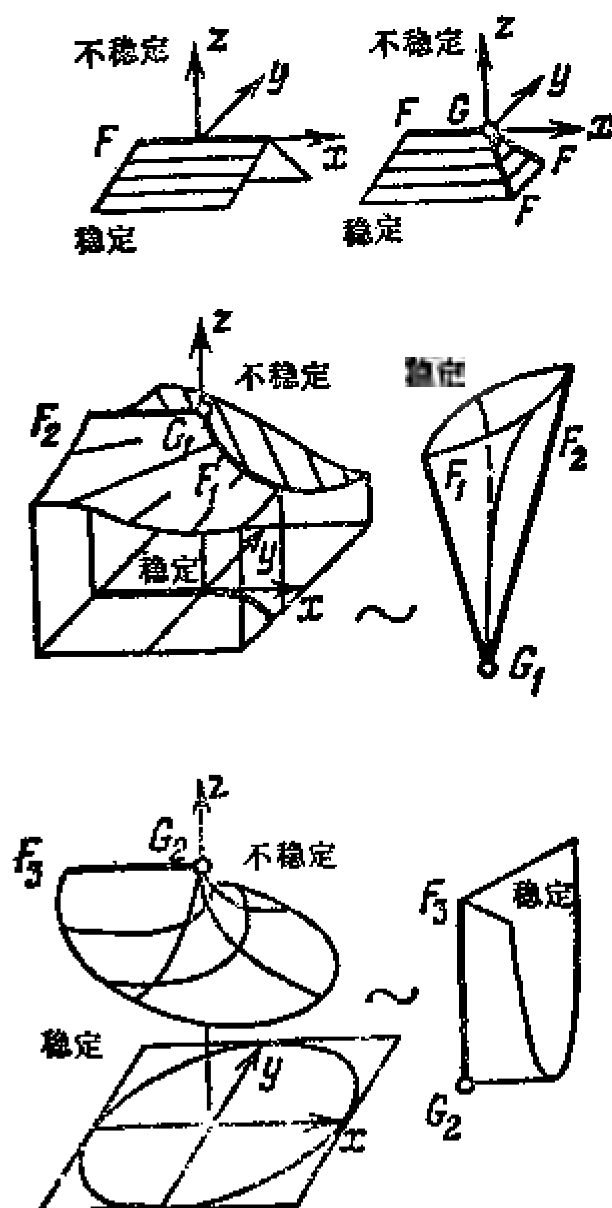


图　118

1) 与此相似，$(n+1)$ 参数族的稳定区域边界的奇点与 n 参数族的增量图的奇点有相同类型.

2) 即指一个可拓展为曲面邻域的微分同胚的映射.

都列在下表中(图 118):

二面角 (F_1): $|y|+z=0$;

三面角 $(G_{3,4,5})$: $z+\max(x,|y|)=0$;

棱的一端 (G_2): $z+|\mathrm{Re}\sqrt{x+iy}|=0$ ($\mathbb{R}^3$ 中的这个曲面微分同胚于曲面 $XY^2=Z^2$, 其中 $X\geqslant 0$, $Y\geqslant 0$);

棱的角点 (G_1): $z+\lambda(x,y)=0$, λ 是方程 $\lambda^3=x\lambda+y$ 之根的最大实部 ($\mathbb{R}^3$ 中的这个曲面微分同胚[1]于 $X^2Y^2=Z^2$, 其中 $X\geqslant 0$, $Y\geqslant 0$)。

稳定区域边界角总是指向外侧的，从而向不稳定区域伸进了一个楔形。这显然是一个很一般道理的结果，按这个道理，总是没有美妙的结论[1]。

由以上所述还可得到关于稳定性区域边界的一些整体性质。例如，若边界为闭，则$(G_i, i>1)$型顶点总数为偶的，正如 G_1 与 G_3 型顶点的总数也为偶的。

以上所述各定理的证明均可在 В. И. Арнольд [7] 和 Л. В. Левантовский [1], [2] 中找到(后两文是英译本所加)。

§ 31 向量场的奇点的分枝

在本节中，我们考虑微分方程的单参数族，并研究通有族奇点的分枝。

A. 奇点曲线

考虑一个光滑依赖于参数的向量场，设对参数的某些值，场中有奇点。现提出以下问题：参数变动时奇点如何？

定理 光滑依赖于一个参数的向量场的奇点也光滑依赖于此参数，只要场在奇点的线性部分固有值非 0。

◀在所研究的点与参数值附近，n 维相空间中的向量场族由

---

1) 在通有的 k 参数矩阵族的稳定性边界上，当 k 充分大时，只有有限多个奇点[除了相差包含空间的局部微分同胚 (Левантовский)]。——英译本注

n 个 $n+1$ 变元(n 个相坐标与参数 ε)给出,奇点则由 n 个($n+1$)未知数的方程的组 $v(x,\varepsilon)=0$ 给出. 由隐函数定理,若在该点 $\partial v/\partial x$ 的行列式非0,这些方程将局部地给出一条光滑曲线 $x=r(\varepsilon)$. 但这行列式即是场在奇点的线性化的固有值集合. 由假设它非0. ▶

注 一个奇点,如果场在该点的线性化的一切固有值均非0,我们就称它为非蜕化的. 因此,如果场是光滑依赖于参数的,则其奇点只要是非蜕化的,也光滑依赖于参数. 上面的证明对任意维参数空间都有效.

对于通有的场,所有奇点都是非蜕化的. 然而,如果考虑向量场族,则对参数的某些值可能发生蜕化,而且不能用族的小摄动消除.

现在研究 n 维空间中的通有的单参数族的蜕化.

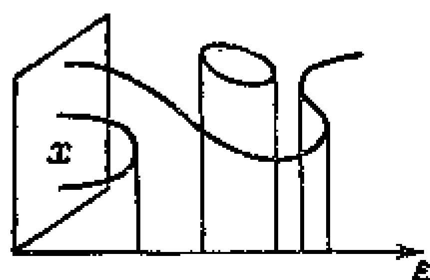


图 119

考虑由相空间和参数 ε 轴的直积 $(n+1)$-维空间,用字母 x 记相空间中的点. 此族将由微分方程族给出如下:

$$\dot{x}=v(x,\varepsilon).$$

考虑在此 $(n+1)$-维空间中由族的奇点(对参数的一切值)组成的集合(图 119):

$$\Gamma:\ \{x,\varepsilon;\ v(x,\varepsilon)=0\}.$$

定理 对于通有族,奇点集是光滑曲线.

此处和下文中"通有族"表示"属于所有族空间中的一个处处稠密集的族";所说的处处稠密集,若族的定义域为紧,或在精细拓扑中考虑(§29),还要求为开;在一切情况下,都要求这个处处稠密集是可数多个开集的交.

◀本定理可以由横截性定理(§29)或 Sard 引理(§10)推出.

事实上,由隐函数定理,若0不是局部映射 $\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$,$(x,$

$\varepsilon) \longmapsto v(x, \varepsilon)$ 的临界值，Γ 为局部光滑曲线。但对通有的映射，0 不是临界值。▶

注 这定理中参数空间的维数无关紧要。

所证的定理排除了奇点的某些分枝。

例如，考虑图 120 左侧的分枝。由定理可知，在小摄动下这种分枝不能保存。事实上易知，在小摄动下，它们会分解为图 120 右方的一种形状。如果在一个问题中出现了图 120 左侧那种分枝，这就表明所考虑的族不是通有的族。这或者与问题的某种特别的对称性有关，或者表明理想化得不当，略去了一些因素，虽然小，却可能定性地改变参数变化时奇点的性态。为了说明在真实的系统中出现的是哪一种情况，使得在理想化时发生了不一般的分枝，需要计算微分方程在理想化时被略去的一些项。下面各段的公式说明了需要计算的到底是哪些项。

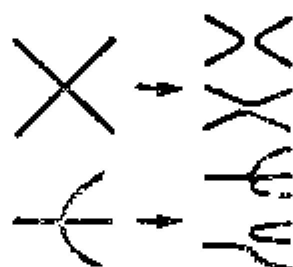


图 120

B. 参数的分枝值

设族的奇点集是一光滑曲线 ($\operatorname{rank}(\partial v/\partial(x, \varepsilon)) = n$)。考虑它到参数值轴上的投影。曲线在 ε 轴上的投影不好的点是蜕化奇点。事实上，由隐函数定理，在非蜕化奇点附近，奇点曲线是参数的光滑函数的图象。

定义 对应于蜕化奇点的参数值称为参数的分枝值，而在相空间与参数值轴的直积空间中，蜕化奇点本身称为分枝点。

把参数 ε 的值看作奇点曲线上的函数。参数的分枝值即此函数的临界值，而分枝点就是它的临界点(即函数的微分为 0 的点)。

如果函数的二阶微分在一临界点处非蜕化，则此临界点称为非蜕化的（现在讨论的情况是一元函数。这时，二阶微分非蜕化即它不为0)。这时相应的分枝点称为非蜕化分枝点。

定义 如果参数的分枝值相应于恰好一个分枝点，而且是

非蜕化分枝点，则此值称为正规的。

定理　对于通有单参数族，参数的所有分枝值都是正规的．如果相空间是紧的，则参数的分枝值是孤立的。

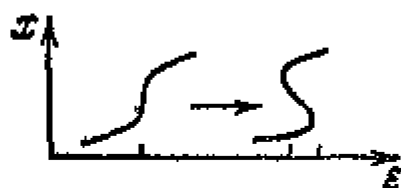


图 121

◀这一论断很容易由横截性定理得出，细节留给读者．▶

注．这定理指出，当参数变化时，通有族的奇点只能当参数经过分枝值时，成对地彼此消失或者成对生成（图 119）．这种类型的分枝是稳定的（即在族的小摄动下，可以保存）．所有更复杂的分枝都会在小的通有的摄动下，分解为几个这种类型的分枝（图 121）．

C．例．直线上的向量场

考虑以下微分方程族所给出直线上的向量场：

$$\dot{x}=\pm x^2+\varepsilon,\quad x\in\mathbf{R},\quad \varepsilon\in\mathbf{R}.$$

当 $\varepsilon=0$ 时，这个场有最简单的非蜕化奇点（$x=0$）．当参数通过其正规分枝值 $\varepsilon=0$ 时，视 x^2 前的符号决定：或者发生两个奇点（一个为稳定，一个为不稳定的消失），或者出现两个立即分离（渐近性态如 $\sqrt{|\varepsilon|}$）的奇点．

不难验证，这个例子是直线上的通有单参数向量场族的惟一不可消除的分枝．

定义　设有两个含参数的向量场族．如果存在参数空间的一个同胚和相空间的连续依赖于参数的一族同胚，使第一个向量场族的有向相曲线族，对参数的每个值都可变为第二个向量场族对参数的相应值的有向相曲线族，则它们称为拓扑等价的．

注意，定义中谈到的两个同胚定义了相空间与参数值空间的直积上的一个同胚 $(x,\varepsilon)\longmapsto(h(x,\varepsilon),\ \varphi(\varepsilon))$，把方程组 $\dot{x}=v(x,\varepsilon)$，$\dot{\varepsilon}=0$ 的相曲线族变为同样形状的第二个方程组的相曲线族．

族在一点的芽的等价性定义也与此相似．若 $(x_0,\ \varepsilon_0)$ 是相空

间与参数空间的各一点，则实现这个等价性的同胚在直积 (x_0, ε_0) 的某个邻域中，定义一个同胚 $(x, \varepsilon) \longmapsto (h(x, \varepsilon), \varphi(\varepsilon))$。

定理 直线上的单参数向量场族在非蜕化分枝点附近，等价于由方程 $\dot{x} = x^2 + \varepsilon$ 在点 $x = 0, \varepsilon = 0$ 所给出的向量场族的芽。

◀给出场的函数 $v(x, \varepsilon)$ 在曲线 Γ 上变号。以分枝点为 (x, ε) 坐标的原点。由此点的非蜕化性，曲线 Γ 的方程为 $\varepsilon = Cx^2 + O(|x|^3)$, $C \neq 0$。由此即得所求证的结论。▶

所证的定理与 §31, B 中的定理一起对于直线上通有的单参数向量场族奇点的分枝，给出了完备的拓扑描述。

D. 周期解的分枝

对光滑映射不动点的分枝和微分方程周期解(即闭的相曲线或者闭的积分曲线)的分枝，我们可以进行完全类似地研究。映射不动点的非蜕化性条件就是：其线性化的所有固有值都不是 1. 在周期解的情况下，则是 Poincaré 映射的线性化的固有值(即由此方程沿此解的法向变化所决定的单值化算子的固有值)不能为1。

特别地，若方程 $\dot{x} = v(x, \varepsilon)$，当 $\varepsilon = 0$ 时，有周期解 $x = \varphi(t)$，其周期为 T，并且适合上述的非蜕化条件，则对小的 ε，也有周期解 $x = \Phi(t, \varepsilon)$，其周期为 $T(\varepsilon)$，而当 $\varepsilon = 0$ 时，Φ 变为 φ (相曲线当然是唯一的；但计算时间起点之处可以改变)。

注 求周期解 Φ 时，设它是 ε 的级数，这就称为 Poincaré *小参数法*；解 φ 称为*生成解*。类似的方法可以用于一种非自治系：即 v 对 t 具有周期 $T(\varepsilon)$ 的情况，并求其 $T(\varepsilon)$-周期解。

问题 求方程 $\ddot{x} = \sin x + \varepsilon \cos t$ 的 2π-周期解，使得当 $\varepsilon = 0$ 时，它变为 $x \equiv 0$，并且误差为 ε^2 阶。

§ 32. 相图的遍有形变

本节中，我们将要定义相图的拓扑遍有形变，并指出它对于最

简单的蜕化奇点的显式形式。

A. 局部分枝理论与局部定性理论

正如上面所说的，当考虑的不是个别的向量场，而是含有参数的向量场族时，蜕化奇点是不能消去的。在通有的向量场族中只会遇到最简单的蜕化。

通常的微分方程定性理论方法(见第三章)，可以用来研究向量场在蜕化奇点附近的构造。在最简单的蜕化时，用这些方法可对相图作充分完整的拓扑研究。所以我们可以既对参数的一般值，也可对其特殊值研究局部相图。这就是研究有关微分方程族问题的一般方法。

对最简单的分枝加以考虑就发现，这个办法会掩盖发生在参数的临界值附近的现象的本质。这是因为在接近参数的奇异值时，非蜕化奇点的邻域(在其中相图由局部理论给出)将会缩为一点(图 122)，然后又在这个奇异值时突然跳跃地变大。结果，相图的变形(例如接近邻近的奇点)是在局部理论适用范围之外的。

于是局部理论排除了在参数的奇异值处所发生的最本质的现象，这就是分枝。

这样，我们得到了如下结论：对蜕化奇点的研究，只有和对这类蜕化不可排除族的研究同时进行，才有真正的意义，这一研究将在相空间和参数空间的直积中蜕化奇点附近进行。换句话说，相空间中的奇点，将要在其一个领域中研究相图，这一邻域不能依赖于参数(当参数趋近奇异值时，这个邻域不能缩为一点)。

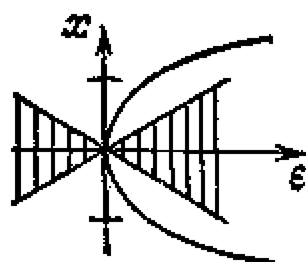


图 122

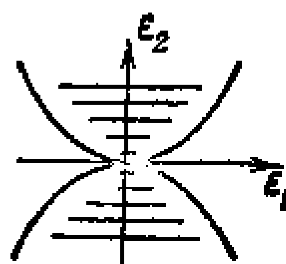


图 123

完全同样的讨论也指出，错误地决定(对研究分枝具有本质意义参数的个数)，是多么危险的．例如，如果用单参数的观点去研究本质上是两参数的现象时，会发生以下的典型的现象(图 123)．对丢掉了的参数的每一个值，我们都可以研究依赖于第二个参数的单参数方程族的分枝．然而，若我们研究的是丢掉的参数接近于其奇异值的情况，则第二个参数值的区间可能会缩为一点．如果我们把这问题看作一个两参数问题(即在第一个参数奇异值的某邻域中进行，而且这个邻域不依赖于第二个参数)，则可以用分枝的局部方法来进行研究，这个方法从单参数的角度来看，就好象是整体性的了．

封闭相曲线的失稳，就是一个初看是单参数问题而实为两参数问题的例子．这里，单值化算子的固有值的模是一个自然的参数，但是第二个参数，即固有值穿过单位圆时的幅角，却时常被忽略．我们将在 §34 中再回到这个问题．

B. 拓扑遍有形变

考虑微分方程族 $\dot{x}=v(x,\varepsilon)$．

我们称映射 v 在相空间与参数空间的直积中的点 (x_0,ε_0) 处的芽为局部族 $(v;x_0,\varepsilon_0)$．因此这个芽的每一个代表元都是在直积中的点 (x_0,ε_0) 的邻域中(而不是定义在相空间的点 x_0 的邻域中)给出的．

局部族 (1) $(v;x_0,\varepsilon_0)$ 与 (2) $(w;y_0,\varepsilon_0)$ 的等价性，就称为一个连续映射 h 在 (x_0,ε_0) 的芽 $y=h(x,\varepsilon)$，它的代表元 $h(\cdot,\varepsilon)$ 对每一个 ε 都是一个同胚，而变 (1) 的相曲线(在 h 的定义域中)为(2)的相曲线，并且保持运动的方向，以及 $h(x_0,\varepsilon_0)=y_0$．注意，当 $\varepsilon\neq\varepsilon_0$ 时，$h(\cdot,\varepsilon)$ 不一定把点 x_0 变为 y_0．

设有局部族 (3) $(u;x_0,\mu_0)$，并且有连续映射 φ，$\varepsilon=\varphi(\mu)$，$\varepsilon_0=\varphi(\mu_0)$，使 $u(x,\mu)=v(x,\varphi(\mu))$，我们就说 (3) 是由(1)用 φ 在 μ_0 的芽诱导出来的．

局部族 $(v;x_0,\varepsilon_0)$ 称为场 $v(\cdot,\varepsilon_0)$ 在 x_0 处芽的拓扑轨道遍

有形变(或简称为遍有形变)，如果所有其它的含有这个芽的局部族都等价于由此诱导出来的族.

以下我们有时也将谈到微分方程的形变，等价性，诱导，遍有形变等等，指的就是对于给出这个方程的向量场的相应概念.

应该强调，向量场的某个芽是否存在着拓扑遍有形变，这一点绝非显而易见；很容易举出不存在具有有限参数的这种形变的场的例子(例如零向量场). 然而当遍有形变存在，而且我们已经找到并研究了的情况下，的确可得到大量的信息. 求出并且研究遍有形变，是一种对相图的分歧作很完整的研究，并将其结果加以集中表述的手段.

例. 微分方程 $\dot{x} = \pm x^2$ 的形变 $\dot{x} = \pm x^2 + \varepsilon$ 是遍有的.

◀见前段. ▶

C. Щошитайшвили 化约定理

以上分枝的例子(一对奇点的生成和消失)是直线上通有的向量场族的仅有的分枝(见 §31). 在多维情况下，一对奇点的生成和消失也是通有的情况. 那么，对于相图会发生什么变化?

结果是，若有一个固有值为0，则 $\mathbf{R}^n$ 中一般蜕化奇点的拓扑遍有形变，可以由前例作简单的扩充而得：

$$\begin{cases} \dot{x} = \pm x^2 + \varepsilon, & x \in \mathbf{R},\ \varepsilon \in \mathbf{R}, \\ \dot{y} = -y, & y \in \mathbf{R}^{n_-}, \\ \dot{z} = z, & z \in \mathbf{R}^{n_+}, \end{cases} \tag{1}$$

n_- 和 n_+ 分别是特征方程在左、右半平面的根数. 例如 $n = 2$ 时，这个方程组描述结点与鞍点的重合(图 124). $\varepsilon = 0$ 时，即得所谓结点—鞍点.

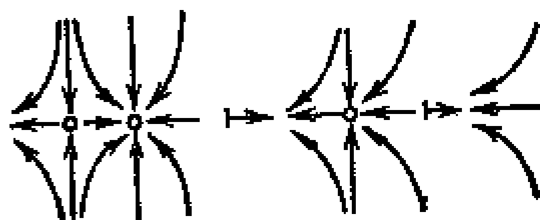


图 124

在§31中，我们把相空间与参数空间直积中那些使特征方程有0根的点称为分枝点.

定理 在单参数向量场族的空间中，一些通有族形成一个处处稠密的集合[1]，这些通有族在每个分枝点附近都拓扑等价于族(1)(在原点附近).

定理在化到 $n=1$ 的情况(这时证明是显然的，实际上，我们上面已证明这点)后，很容易证明. 这种将相坐标的个数减少到所必需的最小值的化约，在最一般的情况下，也可以一劳永逸地作出.

考虑含有有限个参数的向量场局部族 $(v; x_0, \varepsilon_0)$. 为书写方便，设 $x_0=0\in\mathbf{R}^n$, $\varepsilon_0=0\in\mathbf{R}^k$.

设场 $v(\cdot, 0)$ 有奇点 $x=0$，而相应的特征方程有 n_-(或相应地 n_+, n_0)个根在左半平面中(或在右半平面中与虚轴上).

定理 在以上假设下，该族拓扑等价于 n_0 维相空间上族的一个扩充:

$$\begin{cases}\dot\xi=w(\xi,\varepsilon), & \xi\in\mathbf{R}^{n_0}, \varepsilon\in\mathbf{R}^k,\\ \dot y=-y, & y\in\mathbf{R}^{n_-},\\ \dot z=z, \ z\in\mathbf{R}^{n_+}.\end{cases}$$

◀本定理的证明见 A. H. Шошитайшвили [1].(或[2]，本定理是在后文中，第一次提出的).

证明的程序和 Аносов 关于 Аносов 系统的定理证法相同：证明的基本部分是在相空间与参数空间的直积中，作出五个叶层构造(压缩的，伸长的，中性的，非压缩的和非膨胀的)[参数可以看作补充的相变量而适合方程 $\dot\varepsilon=0$，但这时应该注意，在所考虑的等价变换下，平面 $\varepsilon=$ const. 仍变为该族中的平面]. ▶

五个叶层结构的存在性是由 Э. А. Тихонова [1] 和 M. W Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub [1] (不是为了分枝理论的需要)独立证明的. 再早些，$n_+=0$ 的情况由 В. А. Плисс [2] 考虑

---

1) 和通常一样，通有族的集是可数多个开集之交，且在族的定义域中为紧的或在精细拓扑的假设下，是一个开集.

过。

化约后的微分方程组 $\dot{\xi}=w(\xi,\varepsilon)$ 可以在原方程组中在相空间的一个光滑的(并且光滑依赖于 ε 的) n_0 维流形——即所谓中心流形——上实现。中心子流形的光滑性是有限的(但随 $\varepsilon\to 0$ 而增加),这子流形又不是唯一决定的(最简单的例子即可证明)。

然而,相曲线的性态,包括分枝的整个图象,对于整个方程来说,是由在中心流形上发生的事决定的(特别地,它不依赖于中心流形的选择)。

Шошитайшвили 还证明了,原形变的遍有性等价于化约后的形变的遍有性(即原形变在中心流形上的遍有性)。

所以,相图在奇点附近的局部蜕化的拓扑研究,包括一切可能的分枝的研究,可以限于特征方程的根都在虚轴上的情况。过渡到一般情况可以由方程组简单的扩充来完成(即与简单的鞍点 $\dot{y}=-y$, $\dot{z}=z$, 作直积)。

例 由上述可知,当通有向量场的单参数族有一对奇点生成时,由生成的一个奇点到另一个奇点可作一条(且仅有一条)相曲线(对于接近于分枝值的参数值而言)。

§ 33. 平衡位置的失稳

当特征方程有一对根穿过虚轴时,我们研究微分方程相图的分枝。

A. 例子:柔性与刚性失稳

先从平面上单参数向量场族的一个例子开始,它可以追溯到 Poincaré 与 Андронов。我们将它写为复形式:

$$\dot{z}=z(i\omega+\varepsilon+cz\bar{z}),$$

$z=x+iy$ 是平面 $\mathbb{R}^2$(看作复变量 z 平面)的复坐标。

上例中,ω 与 c 是非 0 实常数,我们不妨认为等于 ± 1; ε 是实参数。

对一切 ε，点 $z=0$ 都是焦点型平衡位置．当 $\varepsilon<0$ 时，这个焦点是稳定的；而 $\varepsilon>0$ 时，它不稳定．当 $\varepsilon=0$ 时，线性近似给出中心；当 $\varepsilon=0$ 时，奇点的性质由 c 的符号决定；当 $c<0$ 时，它是稳定的；当 $c>0$ 时，它是不稳定。

在以上所作的奇点关于 ε 的局部分析中，我们注意到了当 $\varepsilon=0$ 时奇点失稳，但是遗漏了一个重要的与失稳有关的情况，即极限环的生成（图127）。为了避免这种错误，我们应该考虑 (z,ε) 空间中 0 的邻域，而不应该只对固定的 ε 在 z 空间中考虑。

研究 (z,ε) 空间中 0 的邻域，如下作法很方便．考虑函数 $\rho(z)=z\bar{z}$．由 (1) 可求出 ρ 的方程

$$\dot{\rho}=2\rho(\varepsilon+c\rho),\quad \rho\geqslant 0.$$

我们很容易在射线 $\rho\geqslant 0$ 处研究所得的方程族．除了对每个 ε 值都出现的奇点 $\rho=0$ 以外，若 ε 与 c 异号，还有奇点 $\rho=-\varepsilon/c$．当 $c>0$ 时，向量场 $\dot{\rho}$ 形如图 125 所示，这要视 ε 的符号而定．

点 $\rho=0$ 相应于 z 平面的原点，点 $\rho=-\varepsilon/c$ 相应于一极限环，而且只当 c,ε 异号时，它才是实的。

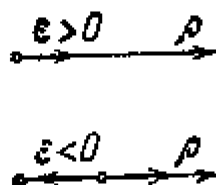


图 125

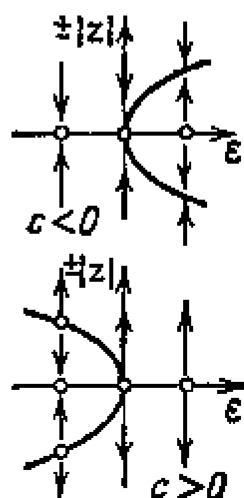


图 126

为了更好地了解这里的情况，现在把 ε 画在一个轴上，而将 $|z|$ 画在另一轴两侧．这时，极限环当参数变化时的性态如图126两图形之一，视 c 的符号而定．于是极限环的半径与 $\sqrt{|\varepsilon|}$ 成正比．

先看 $c<0$ 的情况．当 ε 经过 0 时，原点处的焦点失稳．$\varepsilon=$

0 时，原点处仍有稳定焦点，但不是"粗糙"的，即相曲线不是指数地趋于 0（图 127）。

当 $\varepsilon > 0$ 时，相曲线离开原点到正比于 $\sqrt{\varepsilon}$ 的距离时，就围绕在稳定的极限环上。因此，当 $c < 0$ 时，在 ε 穿过 0 时，发生失稳而产生一个稳定的极限环，其半径随 $\sqrt{\varepsilon}$ 而增加。



图 127　　　　图 128

换言之，恒定状态失稳而产生了稳定的周期状态，其振幅正比于参数对其临界值的偏离的平方根。物理学家称这种情况为自振的软激发。

$c > 0$（图 128），$\varepsilon < 0$ 时，有不稳定的极限环。当 ε 趋于 0 时，变为一个平衡位置，它在 $\varepsilon < 0$ 时是一个稳定焦点。$\varepsilon = 0$ 时，焦点变为不稳定的（但不稳定性是弱的，非指数的）。对于正的 ε，这个焦点即使对于线性近似也是不稳定的。

由于以下原因，这种失稳称为硬的。

设想系统接近于稳定平衡，而当参数变化时，平衡位置失稳。当 $c > 0$ 时，若 ε 由负侧接近 0 时（甚至更早一些），恒存在的扰动已将系统拉出了平稳位置的邻域，而跃入另一种状态（例如一个远离的平衡位置，极限环或一个更复杂的吸引集）。这样，当参数连续变化时，状态是僵硬地跳跃式地变化的。

$c < 0$ 时，新生成的自振的振幅依赖但不光滑地依赖于参数（有方根式的奇性），而只是连续的；在这个意义下，运动状况柔软地变化。

在研究方程（1）时，我们本质地采用了"遍有的"观点：如果不是考虑 (z, ε) 空间的邻域，而是对固定的 ε 考虑 z 空间的邻

域，则会漏掉极限环．这与以下事实是相符的：在k参数族中应该考虑余维数k的蜕化；我们研究的余维数为1的情况，嵌入在一个单参数族中．

事实上，上面的例子穷尽了平面上一般的单参数族，当平衡位置失稳时，相图分枝的可能情况，更一般地说，当特征方程的一对根穿过虚轴时，也是如此．

B. Poincaré-Андронов 定理

考虑向量场的单参数族．

设当参数为0时，场在0点有奇点而特征方程根为纯虚(相空间维数为2)的．

定理 在具有以上性质的族中，通有的局部族拓扑等价于上例．

◀我们将应用 Poincaré 将方程化为标准形的方法．当参数为0时有共振，但在参数取接近的非0值时则没有．当参数为0时，相应的共振项不能消去，但对接近的非0参数则可以．如果对于参数的接近于0的非共振值，消去了那些在参数为0时共振的项，则变化将是间断依赖于参数的．我们在其中研究相图的那个邻域半径将随参数接近共振值时而趋于0．

所以，我们不但不能当参数为0时消去那些$\varepsilon=0$时的共振项，即使参数接近于0时也不行．结果我们会得到一个光滑依赖于参数的变换，变换后在方程组中只留下参数为0时的共振项，以及一些到余下的奇点的距离为任意高阶的项．我们想研究这样得到的族的分枝，略去余项，然后或者验证余项不影响相图变形的拓扑，或者考虑余项在其中的影响．

上面所讲的程序对于分枝理论的许多问题都是共同的．现在来看，当它应用到特征方程有一对根穿过虚轴这个具体情况时，会导致什么．共振之形为$\lambda_1+\lambda_2=0$ $(\lambda_{1,2}=\pm i\omega)$．所以在复化平面$\mathbf{C}^2$的固有向量坐标中，标准形式如下(见§23)：

$$\dot{z}_1=\lambda_1(\varepsilon)z_1+a_1(\varepsilon)z_1^2z_2+\cdots,$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_2(\varepsilon)z_2 + b_1(\varepsilon)z_1z_2^2 + \cdots.$$

注意，因为原方程为实，可以取一对复共轭向量为基底，而正则化的变换可以取为实的。这时第二个方程可以由第一个取共轭而得。此外，在实平面上：$z_2 = \bar{z}_1$，所以可以只写第一个方程，而将其中的 z_1 写成 z，z_2 写成 $\bar{z}$。这个方程可以认为是实平面 $\mathbf{R}^2$ 上的原方程写成坐标为 z 的复直线 $\mathbf{C}^1$ 上的另一种(非全纯的)方程：

$$\dot{z} = \lambda_1(\varepsilon)z + a_1(\varepsilon)z^2\bar{z} + \cdots.$$

这里，"……"表示对 $|z|$ 的 5 次的余项。

这引导我们讨论方程族

$$\dot{z} = \lambda_1(\varepsilon)z + a_1(\varepsilon)z^2\bar{z}.$$

研究的方法和 §33，**A** 研究特例的方法相同。这两类记号之间的对应关系如下：

§33 **A** 的例子	$i\omega$	ε	c
通有的族	$\lambda_1(0)$	$\mathrm{Re}\lambda_1(\varepsilon)$	$\mathrm{Re}a_1(0)$

在通有的族中，有

$$\lambda_1(0) \neq 0, \quad \frac{d}{d\varepsilon}\mathrm{Re}\lambda_1(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \neq 0, \mathrm{Re}a_1(0) \neq 0.$$

分枝就是极限环的生成与消失$\left(\text{当 } \mathrm{Re}\ a_1(0) \text{ 和 } \mathrm{Re}\ \frac{d\lambda_1}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\right.$ 异号时生成$\Big)$。

如果上面这三个量均非零(在通有情况下确实均非 0)，则略去的余项并不改变分枝的图象。只要考虑函数 $\rho = |z|^2$ 沿向量场的导数就容易证明这一点：

$$\dot{\rho} = 2\rho\ (\mathrm{Re}\ \lambda_1(\varepsilon) + \rho\mathrm{Re}\ a_1(\varepsilon) + O(\rho^2)).$$

由此公式容易看到 $O(\rho^2)$ 并不影响相图在坐标原点的某个(不依赖于 ε 的)邻域中的分枝。▶

实质上，Poincaré 就已知道以上的定理；明确的叙述和证明是 Андронов 给出的[见 А. А. Андронов [1]，А. А. Андронов,

Е.А. Леонтович-Андронова [1] (又见 А. А. Андронов 全集，186 216 页)]. 我于 1965 年向 R. Thom 讲了这个理论，他以后就开始以 "Hopf 分枝"的名字研究它 (例如可见 M. Hirsch, S. Smale [1])、奇怪的是在 J. E. Marsden, M. McCracken [1] 的长达 20 页参考文献中(甚至在 R. Abraham, J. Marsden [1] 第二版的 30 页的参考文献中) 都没有 Андронов-Леонтович-Андронова[1]这篇基本著作. 这个定理也可见于 Андронов-Хайкин 的名著 [1] 中.

C. 高维情况

把 Poincaré-Андронов 定理与化约定理 (§32) 联系起来，即得下面的结论.

定理 $\mathbf{R}^n$ 中通有特征方程具有一对纯虚根的向量场的拓扑通有形变，可由 Poincaré-Андронов 方程组简单地加以扩充而得:

$$\dot{z} = z(i \pm \varepsilon \pm z\bar{z}), \quad z \in \mathbf{C}^1, \ \varepsilon \in \mathbf{R},$$
$$\dot{u} = -u, \qquad u \in \mathbf{R}^{n_-},$$
$$\dot{v} = v \qquad v \in \mathbf{R}^{n_+}, \ n = n_- + n_+ + 2.$$

研究这个方程组没有任何困难.

例 令 $n = 3$, $n_+ = 0$, 而 $z\bar{z}$ 前的符号为负. 这时由定理可知，在坐标原点的一个与 ε 无关的邻域中，当一对固有值穿过虚轴时，会生成一个半径为 $\sqrt{\varepsilon}$ 的柱面吸引其邻近的轨道. 柱面上有一稳定的极限环，而所有的轨道最终都围绕其上. 于是，这个情况相应于出现自振动的软失稳.

这种蜕化的情况曾由许多学者研究过; 特别 Hopf 讨论过高维情况下极限环的生成 [1]. Ю. И. Нейтарк [1] 和 Н. Н. Брушлинская [1] 得到了进一步的结果.

上述的一般定理包含了相图变形的完备的研究(而不只是极限环的分枝) 然而它只是在 Шошитаишвили 的工作中得到证明，他利用了 Андронов 和 Poincaré 二维情况的结果和化约定理.

D. 在流体稳定性理论上的应用

在各种具体问题中，常常遇到以上的情况．例如：力学的，物理的、化学的、生物的和经济的系统每一步都会有失稳．现在我们以这类型的一个特定问题作为例子——这就是不可压缩粘性流体的定常流的失稳问题．

设 D 是流体占据的区域，v 是其速度场．运动由 Navier-Stokes 方程描述

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v\nabla, v)=\nu\Delta v-\operatorname{grad}p+f,\quad \operatorname{div} v=0,$$

ν 是粘性系数，f 是无势体积力；压强 p 由不可压缩性决定．在 D 的边界上例如可以给出附加条件 $(v|_{\partial D}=0)$．

设初始速度场决定了整个以后的运动，于是方程定义了(由在 ∂D 上为 0 的无源向量场构成的)无穷维空间中的动力系统．[事实上，我们只在二维情况下证明了此事．关于 Navier-Stokes 方程解的存在，唯一性和性质已有大量文献，但基本问题尚待解决．]

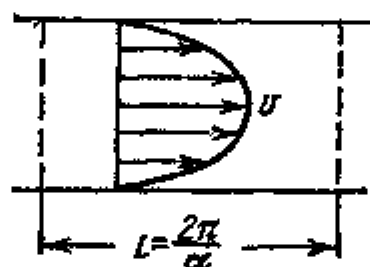


图 129

例如考虑平面管道中具有抛物线速度剖面的 Poiseuille 流(图 129)．对粘性系数的每个值，Poiseuille 流都是此动力系统在一函数空间中的恒定点．当粘性充分大时，这个平衡位置是稳定的，但粘性减小时，就会失稳．我们可以用 §33 C 中的定理来研究这时它会发生的变化．

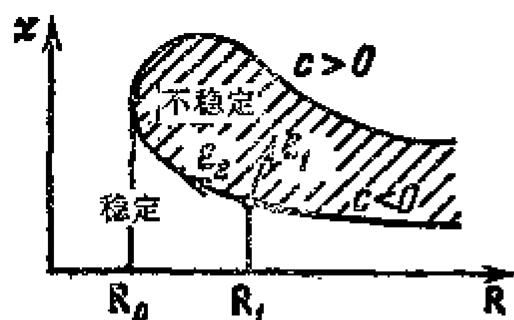
当然，对无穷维问题要特别小心．有可能无穷维性质并不特别危险，因为粘性很快地清除了高频成分，从而对任意非 0 的粘性系数，该系统变成了有限维的[1]．另一个困难在于我们不能确认这

1) 按照 Ю. С. Ильяшенко 的思想 T^2 上的 Navier-Stokes 方程的任意吸引子维数不超过 const. R^4. 最近 M. И. Вишик 和 A. Бабин 对于有边的二维流形估计了这个维数的上界：dim$\leqslant$const. exp$(R^{4+\varepsilon})$，ε 是任意正数．——英译本注

个系统是否通有：这是需要通过计算来验证的。看来似乎自然会有，"一般形状"的区域中以及一般的体积力 f 下的 Navier-Stokes 系统是通有的；但是 Poiseuille 流是很特殊的；例如，它有一个很大的对称群。

我们限于这样的扰动，使速度场沿流动以波长 l 周期地重视。为使底流的速度正规化，我们将改变外力使之与粘性成正比，且流体的流量 Q 为常数 ($f=\text{const}.\ Q\nu$)。这时将得到一个双参数族，其参数为 l 与 ν。通常以它们的倒数 $\alpha=2\pi/l$（波数）和 $\boldsymbol{R}=\text{const}.\ Q/\nu$ (Reynolds 数)为参数。这样，造成不稳定的粘性减少，相当于 Reynolds 数增加。

计算(不用计算机无法实现)指出，当 Reynolds 数增加到某个临界值 $\boldsymbol{R}_0(\alpha)$ 时，有一对复根由稳定性半平面穿过虚轴到达不稳定半平面。于是我们遇到这样的失稳，即有一极限环生成或消失。



130

其符号决定生成刚性振动或柔性振动的系数 c 也已经算出。为了表述这个结果，最好在 $(\alpha,\boldsymbol{R})$ 平面上作出稳定性边界。它是图 130 中的"舌形"；它的最左端是最重要的：$\boldsymbol{R}$ 坐标是第一个失稳点，α 坐标决定了造成不稳定性最危险的波长。

事实是，对于稳定性边界的整个左上部分，系数 c 是正的，即有刚性激发。因此，在 Reynolds 数达到临界值 $\boldsymbol{R}_0$ 之前，在相空间离**开平**衡位置(即离开 Poiseuille 流)的地方，即已发生振荡状态[1]，而当 Reynolds 数接近 $\boldsymbol{R}_0$ 时，小摄动即可使系统进入它。这个新的状态也可能是稳定的恒定点(用流体力学的术语即是 Poiseuille 流以外的定常流)或极限环(流体力学中称为周期流)，但也可能有更复杂的构造，例如可能是环面上的条件周期运动。此外由刚性

1) 对于任意形状的系统，另一个可能性是趋向无穷；但对我们的系统，这显然是不会发生的，因为在无穷远处，由于粘性的阻尼作用，相速度是指向坐标原点的。

激发产生的状态可能是 Аносов 系统或有双曲的性质，即有吸引集，其上有非常不规则、不稳定的轨道。即使自由度为有限，相应动力系统的谱也可能是连续的(即当吸引集维数为有限时如此)。实验学家称这种状态为湍流。

1963 年，E. N. Lorenz 发表了他的论文[1]，他第一次观察到了(在模拟对流的流体力学理论的三维相空间的)方程组有非平凡的吸引性质。

Lorenz 的方程组形如

$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$, $\dot{y} = -xz + rx - y$, $\dot{z} = xy - bz$; $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$. 看来，目前找到了双曲吸引集的模型都含有"泵"型项，亦即负粘性项，而在 Navier-Stokes 方程中则没有。然而 1964 年，当作者试图对二维环面上具有正弦外力的 Navier-Stokes 方程的 Галёркин 近似所成的六维相空间中，找一个双曲吸引集(用 Введенская 编的计算机程序)，发现吸引集显然是三维环面(可能是因为 Reynolds 数太小)。就作者所知，迄今没有找到 Navier-Stokes 方程或其 Галёркин 近似的双曲吸引集。另一方面，上面讲的数值试验可以作为把微分同胚群上的测地流，应用于流体力学的一系列论文的起点[见 В. И. Арнольд [4], D. G. Ebin, J. Marsden [1], А. М. Лукацкий [1], [2]。曲率为负，指明相应吸引集的指数不稳定性。Лукацкий 对 S^2 与 T^4 上流的绝大多数截面找到了负性以及(每个维数的) Ricci 曲率为负]。

Henon 就吸引集上具有不稳定轨道的情况提出了一个很简单的模型 (M. Henon [1])。Henon 考虑了平面上的二次"Cremona 变换"，其形如 $T_1T_2T_3$，而

$$T_1(x, y) = (y, x),\quad T_2(x, y) = (bx, y),$$
$$T_3(x, y) = (x, y + 1 - ax^2).$$

有趣的是：注意到，在 $a = 1.4$, $b = 0.3$ 时作的数值试验表明吸引到一个集，它局部地形如一个 Cantor 集与一个区间的积，但在现有的双曲性定义的框架下，我们还不能成功地加以描述(甚至不能排除此集可能分散在很长的闭环线的吸引区域中)。所以，数学

家都不承认 Henon 的吸引集为双曲集。与此同时，从实验观点看来，相点在变换 T 反复作用下的运动，显然具有随机的湍流的性质(这可以说是另一个过分崇拜公理化的一例子)。

P. B. Плыкин [1] 作出了平面上真正的双曲吸引集的例子。他作出了由平面上具有三个洞的区域(图 131 上)到它的阴影部分(图 131)的微分同胚，它有这样的性质：此区域在该同胚逐次作用下象的交集是一吸引集(任一点在迭次作此微分同胚下的像到此集的距离趋于 0)。这个交局部也是 Cantor 集与区间的乘积，而每个区间上相近点的距离，当反复作此变换时，都会增加。

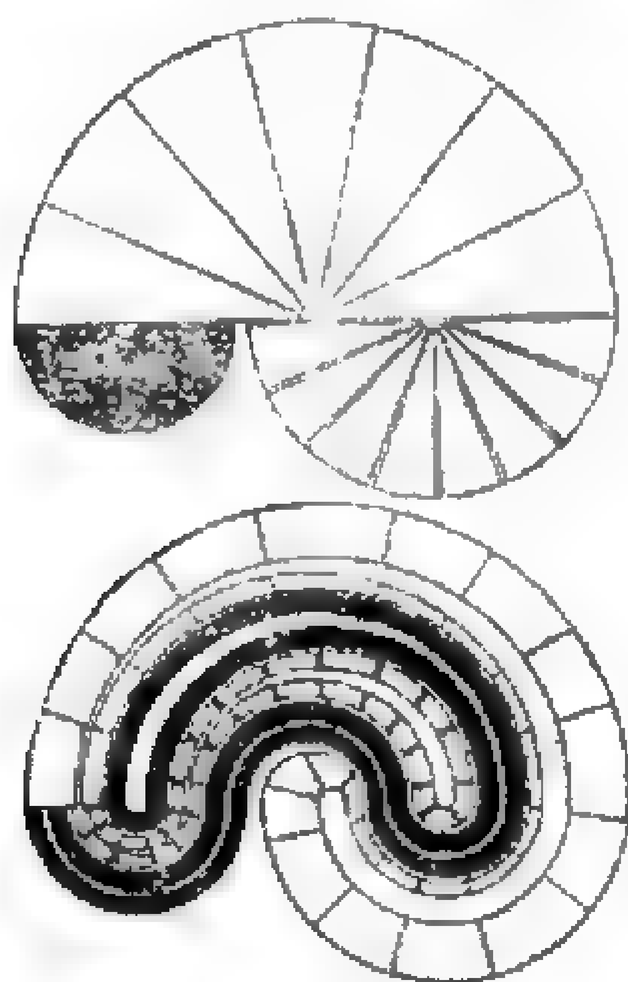


图 131

在 Marsden, McCracken [1] 中，有很多关于分枝理论及其应用的丰富文献(超过 350 篇)。

当 Poiseuille 流失稳以后，会出现什么状况呢？一些专家认为，解决这个问题已经是现代计算机能力的界限外的事了。

在这种情况下，必需做的事也许就是不要放弃作定性的预测，这是可以完全不需计算而只要依靠上述的有关分枝的一般理论就可做的事。

现在考虑的问题中有两个参数：α 与 $\boldsymbol{R}$。因此除余维数为 1 的奇点外，还可能有余维数为 2 的奇点。我们现在来看其中之一，即与 c 的变号有关的。计算表明在 Reynolds 数很大时，在失稳的舌形区域下方，硬激发变成了软激发。为了理解在这个时刻发生的事，需对这个二重的蜕化作出一个双参数的遍有族。这个族很容易作：其形状如

$$\dot{z}=z(i\omega+\varepsilon_1+\varepsilon_2 z\bar{z}+c_2 z^2\bar{z}^2),\quad z\in\mathbb{C}.$$

(相空间的其余坐标对应于稳定的固有值，故未写出)。由图 130 可以看清 ε_1 和 ε_2 的意义；在点 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ 处形态变化的性质将由 c_2 的符号决定。

和前面一样，令 $\rho=z\bar{z}$，于是对 ρ 有方程

$$\dot{\rho}=2\rho(\varepsilon_1+\varepsilon_2\rho+c_2\rho^2),\quad \rho\geqslant 0.$$

按照 ε 和 c 的符号，有下面几种可能情况。

1. $c_2<0, \varepsilon_2<0$。当 ε_1 由负变为正时，系统柔滑地进到自振动的周期稳定状态(图 132)。

2. $c_2<0, \varepsilon_2>0$。当 ε_1 由负变正时，系统很硬地进到自振动的周期稳定状态；即在平衡位置失稳前产生极限环，以及失稳时在平衡位置上生成不稳定的极限环。

我们可以在硬激发为软激发所取代的点附近，研究上述的稳定极限环，因为它很接近于一平衡位置。但对于参数 (α, R) 的其它值，这一极限环可能有一解析拓展(在远离平衡位置处)；我们将看到，可以在平衡位置硬性失稳而形成的不稳定极限环的解析拓展中来找它。上述稳定极限环可能是造成失稳时或失稳后的状态的因素之一。

3. $c_2>0, \varepsilon_2<0$。失稳是软性的，但极限环可能在生成以后立即消失，与来自远方的不稳定极限环重合。这以后，系统将硬性地生成一个新的状态。

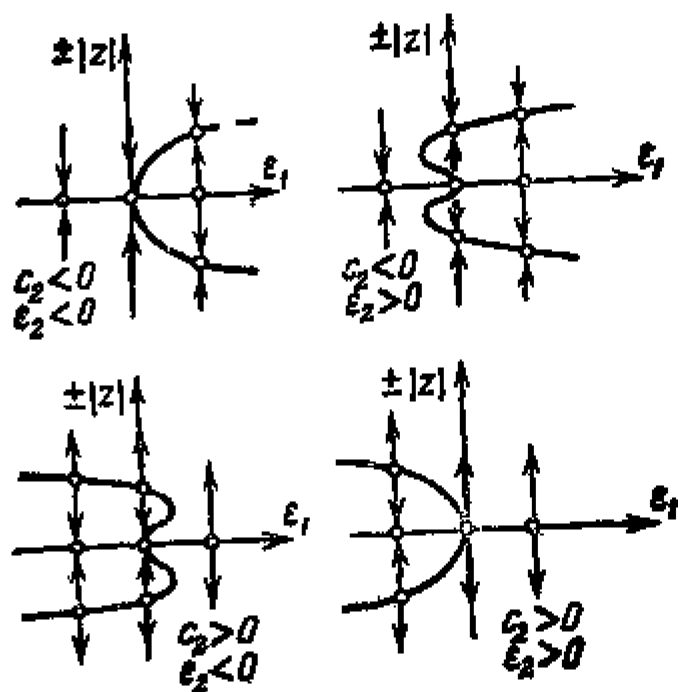


图 132

4. $c_2>0$, $\varepsilon_2>0$. 通常的硬性激发.

这样，不论 c_1 的符号如何，当 ε_2 的符号适当时，上述分析使我们得到一个(与单参数分析相比，在定性上为新的)现象：$c_2<0$ 时，我们显式地得到了硬性激发后出现的状态.当 $c_2>0$ 时，则发现软激发生成的状态是短寿的.为了决定究竟是哪一种情况($c_2<0$ 或 $c_2>0$)实地出现，需作极为繁复的计算.

在流体动力学稳定性理论中，稳定性区域的边界与减量图有种种奇性出现，从而有可能应用 § 30 的结果. 为将分枝的一般理论应用于流体动力学稳定性理论，重要的是要讨论那些具有各种对称性问题中的通有情况，而在许多流体动力学问题中，流场区域 D 有某种对称群(例如 Poiseuille 流中的平移群；在研究参数 α 时，这个群的表示会起作用).

定常流失稳后，流体的性状在许多著作中讨论过(例如见 Л. Л Ландау, Е М. Лифшиц [1] 中以 Л. Д. Ландау 在 1943 年的工作[1]为基础的 §27(湍流的发生)). 在这个理论中通常假设有自振动的软激发状态，同时作者还研究了极限环的失稳. Landau 假设在这时会出现频率个数越来越大的准周期运动；无疑地，之所以如此是因为他不知道还有其它的动力系统.

1965 年，作者就上述理论在 IHES（高等科学研究所，位于法国 Bures Sur-Yvette）的 R. Thom 的讨论班上作过讲演. 六年后，Ruelle 和 Takens [1] 作出了一个极限环失稳而出现一种比准周期运动更复杂的性状的例子；然而，他们的例子有点怪，因为它对应于形变参数空间中度量很薄的（但仍然是开的）区域. 以后实验工作的总结可以在 J. B. McLaughlin, D. C. Martin [1]中找到.

应该指出，为了应用上面的结果，必须使失稳在软状态中发生，而 Poiseuille 流的失稳是硬性的.

E. 余维数为 2 的蜕化

以上分析了的种种情况（一对奇点的生成与消失，由奇点到极限环的生成与消失）穷尽了通有的单参数向量场族中奇点附近相图的分枝的各种情况.

在两参数族中可以在参数平面的曲线上遇到这些奇点，但除此以外，在参数平面的个别点上看到更复杂的蜕化. 在这些更复杂的蜕化中，以下五种不能用两参数族的微小摄动来消除.

1. 一个具有附加的蜕化的零根，例如（图 133）

$$\dot{x} = \pm x^3 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

容易验证，上述形变是（拓扑）通有的；在高维情况下，通有形变可以由鞍点扩充而得.

图 133 左是 $+x^3$ 情况的分枝图. 半立方抛物线将参数平面分成两部分. 在小的一块中，系统在 $x=0$ 附近有三个平衡位置，而

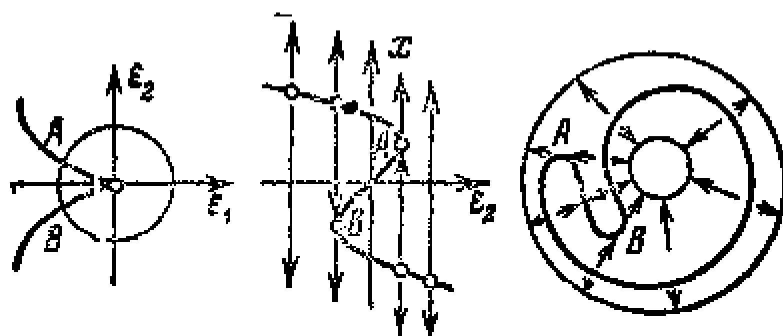


图 133

在大的一块中只有一个．图 133 右是当参数沿小圆绕 $\varepsilon=0$ 一周后相图的形态变化．这个圆周与一维相空间的直积是一圆环，平衡位置在此环中形成一条封闭曲线，而向量场的性态可从图上看清楚．

2. 一对具有附加蜕化的虚根．例子是

$$\dot{z}=z(i\omega+\varepsilon_1+\varepsilon_2 z\bar{z}\pm z^2\bar{z}^2),\quad z\in\mathbf{C}.$$

分枝图是直线 $\varepsilon_1=0$ 以及与它在原点相切的半条抛物线；图 134 上画的是 $+z^2\bar{z}^2$ 情况的分枝图．

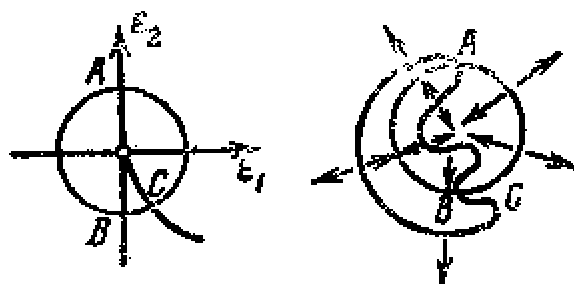


图 134

图 134 右方给出了参数绕 0 一周后相图的形态变化．图上的环是参数平面上的圆周与一直线的直积，在此直线上标出了 $\pm|z|$．图上的圆对应于平衡位置 $z=0$，而每个极限环均由半径与曲线 $\varepsilon_1+\varepsilon_2|z|^2+|z|^4=0$ 的两个交点来表示．

$-z^2\bar{z}^2$ 情况的分枝图以及圆上的族与此相类

3. 两对虚根．

4. 一对虚根以及一个零根．

这些情况还没有被充分地研究过，所以不能作出遍有族；此外，我们也不清楚在两对虚根情况下是否存在拓扑遍有的两参数(至少是有限参数)族（既使当它们同时从一个半平面过渡到另一个半平面时，假设其频率比有通常的不可通约性也是这样[1]）．

最后，余维数 2 还有一个情况．

5. 两个零根．下面的参数平面 $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ 上的方程组的族是

1) 但可参见I. I. Morozov [1] 以及 G. Jolondek 关于情况 4 的一篇即将发表的文章．——英译本注

一个例子：

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_1 + x_1^2 \pm x_1 x_2.$$

分枝图把 ε 平面分成 A、B，C，D 四个区域（如图 135），对应于在上述公式中选择 $+x_1x_2$。

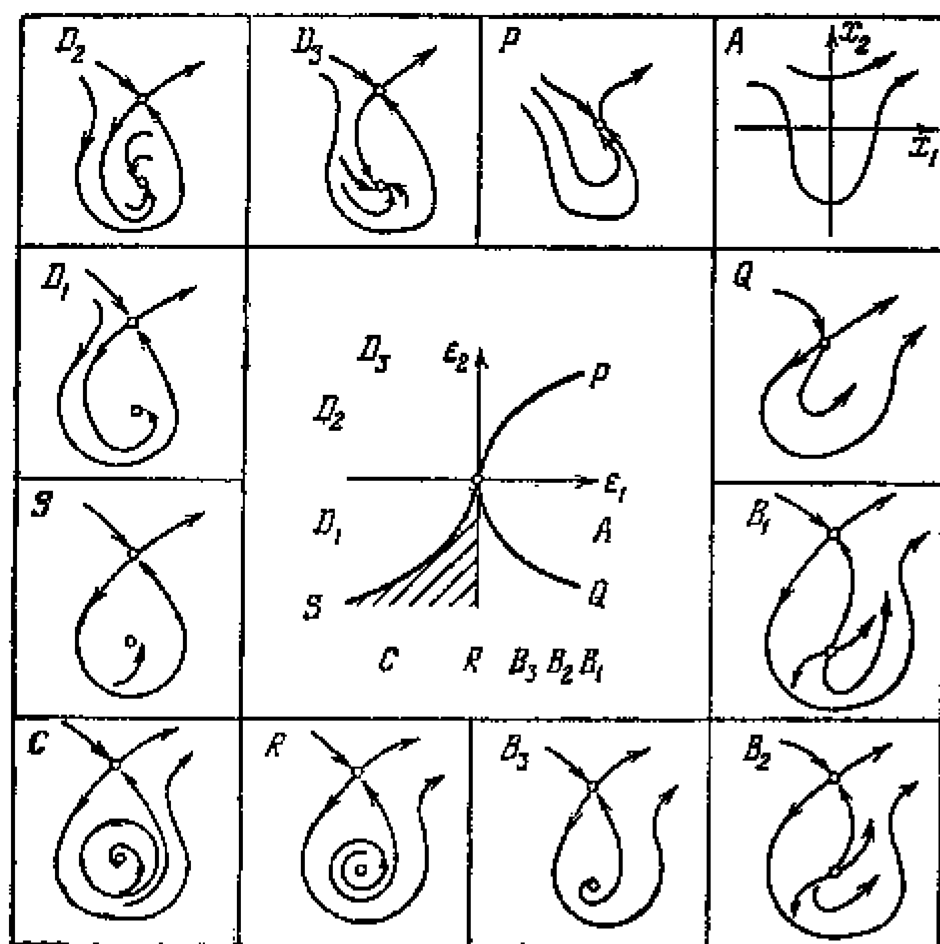


图 135

对应于 ε 平面上四个区域的相图见图 135. 对应于分枝图的各枝，有具有余维数为 1 的方程组 (P, Q, R, S)，见图 135.

我们要注意，在分支 S 上的分枝——即由一圈分离曲线生成一个环线——没有包括在余维数为 1 的奇点的分类中，因为这不是一个局部(即在奇点附近)的，而是一个整体的现象. 因此我们看到，在对奇点的分枝的局部研究中，随着族的参数个数的增加，小余维数的整体分枝开始起作用. 由此可知，在参数充分多的局部问题 ，所遇到的困难和结构稳定系统(不是处处稠密)的困难

是相同的，后者就是 Smale 在研究流形上的向量场的整体问题时发现的(见 § 15)。

相应于公式中选取"一"号的分枝，只要改变 ε 和 x_2 的符号，就可化为前面的讨论。

定理 相平面的奇点处特征方程具有两个零根的通有向量场，具有两个参数的拓扑通有形变，而且等价于上述两个形变之一。

换言之，若平面上的通有两参数微分方程族，对于参数的某值，其奇点的特征方程有两个零根，则必可用参数的连续变换以及相平面的坐标的(连续依赖于参数的)连续变换化为以上形状。

这个定理是 1971 年由 Р. И. Богданов 证明的，首先发表于 Арнольд 的综述文章[7]中。 F. Takens 在 1974 年也宣布过类似的结果。通有性的证明并不简单。主要困难在于研究极限环的唯一性。 Богданов 对依赖于参数的椭圆积分性态的考虑克服了这个困难。见 Р.И. Богданов [1]，[2]。

§ 34. 自振动的失稳

在分枝理论中，继相图在平衡位置附近的形态变化问题之后，稍微复杂一点的问题就是相图在封闭相曲线附近的形态变化问题。这问题迄今仍未完全解决，而且显然在某种意义下不可能解决。虽然如此，用分枝理论的一般方法可以给出有关这种形态变化的本质的信息；本节将对这个方向的基本结果作一个简要的概述。

A. 单值化与乘子

考虑微分方程组的封闭相曲线。我们关心的是当方程有小的变化时，相曲线在此曲线附近分布的形态变化。

对于通有封闭相曲线附近的相曲线分布，除了相差该邻域的一个微分同胚以外，存在有限多种可能性。为了描述它们，在封闭

相曲线上取一点 O.过此点作横截于封闭的相曲线的小截面(它在相空间中的余维数为 1).过此小面积上充分接近 O 的一点的相曲线将重新与此小截面相交，而围绕此封闭曲线一周．这样产生了在 O 横截的小截面到它自身的映射．这映射称为 Poincaré 映射(图 136).

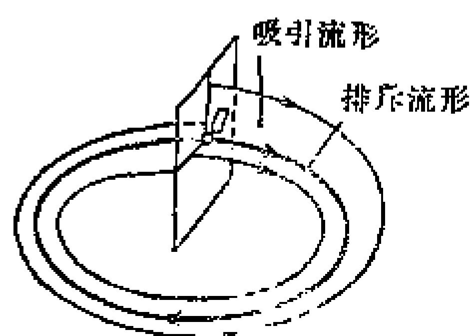


图 136

点 O 是 Poincaré 映射的不动点.考虑此映射在点 O 的线性部分.这个线性算子称为单值化算子.

单值化算子的固有值称为原封闭相曲线的乘子． 解一个周期系数线性方程(沿相曲线的法向变分方程),即可求出单值化算子.

设所有乘子的模均小于 1． 这时可以证明所有邻近于该封闭相曲线的相曲线当向前延拓时都被它吸引．如果有一个乘子模大于 1,则存在离开封闭相曲线的相曲线(即当 $t\to-\infty$ 时，趋向于封闭相曲线).

在一般情况下．有几个固有值在单位圆内,另一些则在其外．这时可以证明，被吸引到封闭相曲线的一切相曲线形成吸引流形(或称稳定流形)，它与上述横截小截面交的维数就是单位圆内乘子的个数．与此类似,当 $t\to-\infty$时,渐近趋于封闭相曲线的相曲线形成排斥流形(或称不稳定流形)．它与横截小截面之交的维数等于不稳定乘子(即在单位圆外的乘子)的个数.

在封闭相曲线的附近,出现了双曲情况 (见 § 14)： 所有其它相曲线中，有的(当 $t\to+\infty$时)离开封闭相曲线 (即沿排斥流形远离)，有的则(当 $t\to-\infty$时)离开(沿吸引流形)． 在封闭相曲线族附近，若在单位圆周上没有乘子相曲线族的拓扑型，由吸引与排斥乘子的个数以及其中负吸引与排斥乘子个数的奇偶性决定.

现在考虑当系统有小变动时图象有何变化.

B. 简单蜕化

一封闭相曲线称为非蜕化的，如果 1 不是乘子．非蜕化相曲线在系统的小形变下不会消失，而只会稍微变形(将隐函数定理用于方程 $f(x)=x$ 即知，这里 f 是 Poincaré 映射)．在非蜕化封闭相曲线的形变下，乘子也只稍微变动．所以吸引与排斥乘子的个数在形变下也不会改变，只要原来的封闭相曲线的乘子均不在单位圆上．

通有的封闭相曲线的乘子都不在单位圆周上．所以，在通有的封闭相曲线邻域中相曲线的分布是结构稳定的．

但是如果考虑的不是单个方程组而是含参数的方程组族，则对参数的个别值，乘子可能位于单位圆周上，于是产生了分枝问题．

和通常一样，我们先从最简单的蜕化开始，即单参数族中不可消除的蜕化．在我们的情况下，这类余维数 1 的蜕化有三种，事实上，单值化算子的特征方程是实的，所以每个非实乘子都有复共轭乘子．所以单位圆上或者有两个复共轭乘子，或者只有一个，即 $+1$ 或 -1．所有这三种情况(复数对、$+1$、-1)都相应于函数空间中余维数1的流形．

例如考虑一封闭相曲线在函数空间中的稳定性区域的边界．它是函数空间中的超曲面，且有三个余维数 1 的分支．第一个分支相应于具有一对模为 1 的复共轭乘子的相曲线，第二个则相应于乘子$+1$，第三个相应于乘子 -1；所有其余乘子都在单位圆内(图137)．

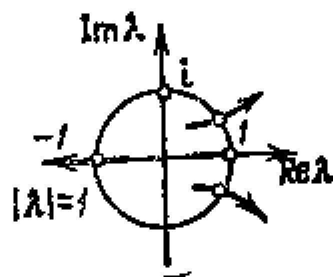


图 137

这三个余维数 1 的超曲面沿余维数 2 的曲面相交，并有进一步的奇性．例如第一个超曲面的自交曲面相应于两对模为 1 的乘子，其余类推．

所以，封闭相曲线的失稳是余维数 1 的蜕化问题．初看起来，为了研究分枝，必须考虑通有的单参数族．但事实并不这样简单：

我们将看到，在失稳问题中，当一对乘子穿过单位圆周时，有两个本质的参数．但是首先考虑，从单参数观点能得到什么结论．

先考虑有一个乘子为 1 的情况．这个情况与单参数族中平衡位置的分枝问题本质上相同．通有的情况是一对封闭相曲线的生成与消失．这时，Poincaré 映射有两个不动点生成或消失．

例 1 考虑 x 轴到其自身的映射：$x \longmapsto x + x^2$．点 $x = 0$ 是不动点，而乘子为 1．考虑具有接近于 0 的参数 ε 的单参数形变

$$f_\varepsilon(x) = x + x^2 + \varepsilon.$$

这个形变是拓扑遍有的．考虑由直线到其自身的任意变换，并设它有乘子为 1 的不动点．若此映射在不动点的二阶导数不为 0（在某一坐标系下，从而在任意坐标系下均不为 0），则称此蜕化的不动点为正规的．

若蜕化的不动点是正规的，则存在此映射的单参数拓扑遍有形变．这时，映射本身及其遍有形变，均在 0 点附近局部拓扑等价于上述特殊映射 f_0 的形变 f_ε．

为了进到多维情况，需要定义所作的形变的扩充．

例 2 考虑线性空间到自身的如下映射：

$$(y, z, u, v) \longmapsto (2y, -2z, u/2, -v/2),$$

y, z, u, v 是四个子空间的点，这些子空间的直积即是所述的线性空间．我们将称此映射为标准鞍点型的（y 与 u 所属的空间维数任意，z, v 所属空间的维数为 0 或 1）．

考虑任意的具有一个不动点的光滑映射．设其所有乘子均不在单位圆周上．这时在不动点附近，此映射拓扑等价于一个标准鞍点型映射（由 § 13 的 Grobman-Hartman 定理易见）．

例 3 考虑例 1 中直线映射的形变和标准鞍点型映射的直积．我们将得到映射的单参数族，其参数为 ε，而坐标在原点附近变动如下：

$$(x; y, z, u, v) \longmapsto (x + x^2 + \varepsilon, 2y, -2z, u/2, -v/2),$$

这个形变称为例 1 的形变的扩充．它是拓扑遍有的．

定理　　通有的单参数映射族，在不动点附近拓扑等价于上述映射，若此不动点有乘子 1，而且参数值在使乘子为 1 的值附近。

◀一维情况的证明很容易。高维情况可以用 Шошитайшвили 定理（§ 32）化为一维情况，此定理对微分方程与映射均适用。▶

C. 乘子为 -1 的情况

当出现乘子 -1 时，封闭相曲线光滑依赖于参数，而其本身不会分枝。然而将有另条一封闭相曲线，由它分出来的分枝环绕两次。为了理解这点，我们再求助于 Poincaré 映射。

例 1　　考虑直线到其自身的映射

$$f_0(x) = -x \pm x^3,$$

其不动点的乘子为 -1。

将 f_0 嵌在以下的族中：

$$f_\varepsilon(x) = (\varepsilon - 1)x \pm x^3.$$

定理　　映射 f_0 的形变 f_ε 是遍有的。通有的单参数映射族在不动点附近拓扑等价于它，若此不动点有乘子 -1，而参数在使乘子为 -1 的值附近。

◀考虑直线的单参数映射族，其不动点的乘子（当参数取某值时）成为 -1。

由隐函数定理，不动点光滑依赖于参数。可以用一个光滑依赖于参数的坐标变换，把不动点移到原点。

现作 Poincaré 变换（§ 25）以逐步消除非共振项。如果保留那些（当参数取临界值时）成为共振的项，而且不仅当参数取这些值时这样作，在参数取邻近值时也这样作，则这些变换将光滑依赖于参数。

在这样的情况下，所有的奇次项都是共振项。所以，映射族可以化为

$$x \longmapsto \lambda x + ax^3 + O(|x|^5),$$

其中 λ，a，O 均光滑依赖于参数。

在通有的族中，λ 对参数的导数，当 $\lambda=-1$ 时，不等于零。这时，可取 $\varepsilon=1+\lambda$ 为参数，而形变成为

$$x \longmapsto (\varepsilon-1)x+a(\varepsilon)x^3+O(|x|^5).$$

对于通有的族 $a(0)\neq 0$. 作坐标的光滑依赖于参数的拉伸，可以使 $a(\varepsilon)=\pm 1$.

还需证明 O 项不影响族的拓扑型。考虑此映射的二次迭代

$$x \longmapsto (\varepsilon-1)^2x+(\varepsilon-1)ax^3+a(\varepsilon-1)^3x^3+O(|x|^5).$$

每一点 x 均移动一个量

$$h=-2\varepsilon(1+\cdots)^2x+(2a+\cdots)x^3+O(|x|^5).$$

这里"……"表示 $O(\varepsilon)$.

很容易研究函数 h 在 (x,ε) 平面上的零等值线（图 138）。图 138 决定了族的拓扑型. ▶

所以，在通有的由直线到直线的单参数映射族中，不动点的乘子在横截通过单位圆周时成为 -1（与乘子成为 1 的情况不同，这时乘子一般地并不穿过单位圆）. 当乘子由圆内到圆外穿过 -1 时，不动点失稳．然后就有两个可能，这要视 x^3 系数符号而定：其一，除了失稳的点以外（在距离为参数与其临界值差的平方根的点处），又出现了周期为2的稳定封闭环线（映射平方的两个不动点），这是软失稳情况；其二，由于失稳前即接近一个二阶环线而使吸引区域缩为一点 0（硬性失稳）.

将标准鞍点扩充如上所述，即可得到高维时的图象.

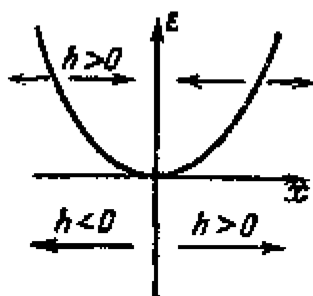


图 138

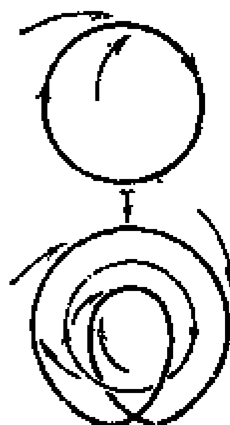


图 139

应用以上讲的关于封闭相曲线的 Poincaré 映射的一切结果，即得软失稳情况的图象(如图 139)：原来的环线失稳，但是出现一个稳定环线，其周期大约是原周期的 2 倍.

上面所说的现象可以很好地在实验中看到. 下面的例子引自 Г. И. Баренблат 在 И. Г. Петоровский 讨论班上的一次报告. 我们考虑一个被重物缓慢牵引的塑料胶片. 当拉伸很小时，这个过程是准静态的(可以认为时间为参数；相点在稳定平衡位置上，所有观察到的量均是常量，即确实是随着时间缓慢变化的). 然而在参数的某些值上(即当拉伸足够时)，图象发生了变化，各种物理参数(例如胶片的长度 x) 作为时间的函数其形状如图 140 所示(图中每一次振动可以认为是发生在参数的一个固定值上，而下一次振动的参数值只是稍有改变).

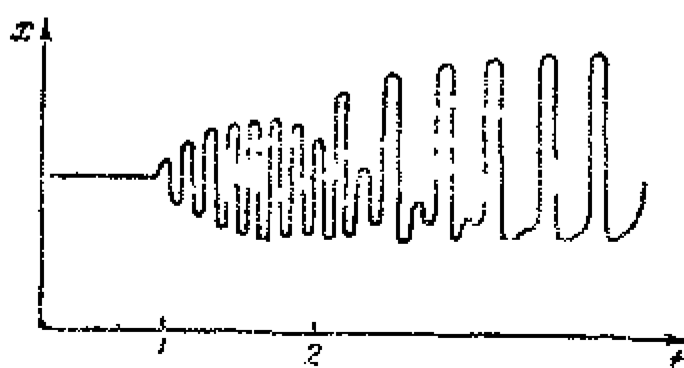


图 140

相变量之所以随着时间这样变化可以解释如下：点 1 相应于平衡位置的软失稳并激发出自振动. 很明显，其振幅与超临界性的平方根成正比. 点 2 相应于环线由于有乘子穿过 -1 而软失稳.

事实上，设在相空间中发生了图 139 那样的形态变化.

每一个物理可观测量都是相空间中的函数. 当相点位于平衡位置时，物理量是常数. 当相点沿环线运动时，量 x 是时间 t 的周期函数(振动振幅随环线的大小而增加). 环线的重迭 (见图 139) 表示量依赖于时间的周期加倍. 这一点在实验上也观察到了(图 140).

这里还要提到，一般说来，在研究自振动时，常记录到被测量的时间依赖性(例如心电图仪)．许多情况下，由相曲线或其在某个平面上投影的形状，对现象的特征会有更清楚的表象．这个方法早已用来诊断力学自振动系统，如泵的故障．把这个方法用于心电图也早由医生们提出了．

D. 一对乘子穿过单位圆

我们对这个情况的了解远不如前两个．拓扑逼有形变写不出来，而且可能根本不存在． 虽然如此，Poincaré 的方法能够得出本质的信息．我们先从(乘子位于单位圆周上时)幅角与 2π 不可通约的情况开始(这个情况可以认为是普遍的，因为有理数集的测度为 0)．

设被映射的空间维数为 2．这时，作适当的光滑依赖于参数的光滑坐标变换，可将映射族化为

$$z \longmapsto \lambda(\varepsilon)z(1 + a(\varepsilon)|z|^2 + O(|z|^4)),$$

其中实数 ε 是族中的参数，$\lambda(0) = e^{i\alpha}$, $\alpha \neq 2\pi p/q$． 对于通有的族有 $d|\lambda|/d\varepsilon|_0 \neq 0$，这表示可取 $|\lambda| - 1$ 为参数．

设没有 $O(|z|^4)$ 这一项．这时研究映射是容易的．事实上，一点的象的模由原象的模决定，这样得到实映射

$$r \longmapsto r|\lambda||1 + ar^2|.$$

对于 $|\lambda| = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$, $r \ll 1$，我们有

$$|\lambda||1 + ar^2| \approx 1 + \varepsilon \mathrm{Re}ar^2 + \cdots.$$

对于通有的族，$\mathrm{Re}a \neq 0$．当 ε 穿过值 0 时，失稳的不动点将会生成一个(半径与 $\sqrt{|\varepsilon|}$ 成比例而且对映射不变的)圆(或者有一个圆在这点消失)．在前一情况(即有圆生成)，它是稳定的，而在后一情况下，它不稳定．在圆周上，映射即化为旋转．

现在回到被略去的项．我们看它们是否影响上述结论．

可以证明，对于完整的(即未略去 $O(|z|^4)$的)映射，确实存在半径为 $\sqrt{|\varepsilon|}$ 数量级的不变的封闭相曲线(见 R. J. Sacker[1])．

这个封闭曲线的稳定性在摄动下仍然保持．然而在此曲线上，

完整的映射与没有余项的映射构造不同．事实上，在此不变曲线上，完整的映射可以既有有理的又有无理的旋转数．不变曲线上如此得到的映射绝不一定拓扑等价于旋转．在有理旋转数时，它一般说来有有限个周期点，且交替地为稳定与不稳定的．这些周期点是原来的由平面到其自身映射的鞍点与结点．这样，在有理旋转数时，不变曲线由一串在结点处连结的鞍点之分离曲线构成(图 141)．

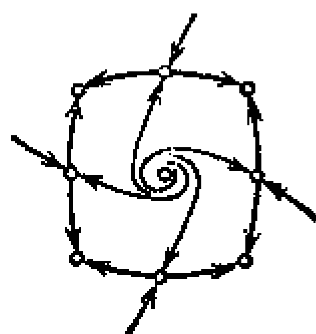


图 141

注意，鞍点的分离曲线是光滑的，但当从两侧接近结点时，两条分离曲线通有地只组成具有有限光滑性的曲线．于是，通有的情况是，不变曲线只有有限光滑性．很容易看到，当参数接近于使乘子穿过单位圆的值时，不变曲线的光滑性增加到无穷可微．

若映射是微分方程的 Poincaré 映射，则其不变曲线决定了三维相空间中的不变环面，它完全由相曲线构成．不变曲线即此环面的横截切口．此环面只有有限光滑性．越接近环面由环线生成的时刻，光滑性越高．当参数在族中变化时，环面上的旋转数，一般地，是变化的，所以它既可取无理值，也可取有理值．

从上述的关于分枝的图象可见，当一对乘子穿过单位圆周时，在通有的单参数族中，不会看到周期解分枝为重数超过 2 的周期解．事实上，这个情况只会发生在乘子(在具有有理幅角的点上)穿过单位圆周时，而这是一个例外的，非通有的情况．

为了理解为何会产生具有大周期的周期运动，必须考虑两参数族．

事实上，只有在两参数族中，乘子才会变成单位根(异于 +1 和 −1)而且不可改变．对一个不动点在共振时(这时有一个乘子接近于单位根)的失稳作两参数的考虑．这使我们能更好地了解单参数族当乘子穿过单位圆周时的分枝．具体地说，我们将看到，一些从单参数观点看来是非局部的形态变化，如果看作两参数问题

就可以用局部方法研究．特别地，我们可以如此研究一些硬性失稳的情况，并且在环线硬性失稳后，可以了解系统跃变成的状态。

E. 环线失稳时的共振

考虑一个由平面到平面自身的映射，并在其不动点附近来讨论，这个不动点有乘子为 1 的 $q>2$ 次根。按照 Poincaré 的一般方法（见第五章），可以在适当的坐标系下将此族写为 $z\longmapsto z[\lambda+A(|z|^2)+B\bar{z}^{q-1}+O(|z|^{q+1})]$，$\lambda$，$A$，$B$，$O$ 都光滑依赖于 ε。

我们不必去研究这个映射，而走另一条路。在共振情况下，Poincaré 方法的每一步都可归结为沿相应的 Seifert 叶层构造（§21）作平均化。所以我们不必将 Poicaré 映射化为标准形，而可以在一环线附近将相曲线的原方程化为具有 2π 周期系数的非自治方程，再用对时间为 $2\pi q$ 周期的坐标变换把它化为标准形式（§ 26）。

这样做的结果是得到在新坐标系下系数对 t 具有周期 $2\pi q$（并光滑依赖于参数）的如下方程：

$$\dot{\zeta}=\varepsilon\zeta+\zeta A(|\zeta|^2)+B\bar{\zeta}^{q-1}+O(|\zeta|^{q+1}).$$

这里，ε 是一复参数，A，B 对 ε 全纯，值 $\varepsilon=0$ 对应于共振（即原方程有一个乘子为 q 次单位根的情况）。

注 1 由以上的论证特别可得

（1） 到 $q+1$ 次在内的项（甚至直到任意高次项），Poincaré 映射都与一个平面向量场的相流变换相同。

（2） 这个向量场在平面微分同胚的一个 q 阶循环群下不变。

（3） 结论（1），（2）不只对个别的 Poincare 映射，而且对它们的光滑依赖于参数的族也对；此外，该群及在此群下不变的向量场都光滑依赖于参数。

注 2 一般说来，未略去高次项的准确的 Poincaré 映射不是任何向量场的相流变换，也不能与任何有限的微分同胚群交换。

由上可见，直到距离闭相曲线为任意高次的项为止，$q>2$ 阶共振附近失稳的分枝问题，可以归结为平面上通有的二参数向量场的相图的形态变化问题，此场对角度为 $2\pi/q$ 的旋转不变。若

$q \leqslant 4$，则此共振称为强的.

2 阶或 1 阶共振也可归入这个格式. 即是，一个环线(当一对乘子穿过单位圆时)失稳对应于函数空间中一个余维数为 1 的超曲面. 它沿着余维数 2 的曲面趋近于相应于乘子 $+1$ 与 -1 的超曲面. 这些余维数 2 的曲面上的通有点对应于 Poincaré 映射有双重固有值 1 (或 -1) 而 Jordan 方块为二阶的闭相曲线.

所以研究乘子穿过单位圆的边界的情况，直到任意高次项为止，归结为研究平面上通有双参数向量场的相图的形态变化，这个场在角度为 $2\pi q$ $(q=1, 2)$ 的旋转下不变，而且对参数的某些值有一个奇点，其线性部分是一幂零 Jordan 方块；相应的线性方程可以化为

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=0.$$

最后，在共振附近失稳时的形态变化问题导致研究平面上的等度变化两参数向量场族的相图的分枝. 现在就来研究这个问题.

§ 35. 平面上等度变化向量场的遍有形变

对于某个对称群为不变的向量场相图的形态变化问题，在研究各种(有对称性出现的)现象时，它自然会发生的. 这种对称性在问题的提出时就已出现.

更令人惊奇的是，在一个原来没有对称性的情况下，在研究共振附近的分枝时 (§21，§34)，也出现对称相空间的形态变化问题. 我们在本节中正是要讨论对称相图的分枝，而这是研究共振所必需的.

A. 平面上的等度变化向量场

令 F 为复变量 z 平面上的向量场. 我们将把它看作 $\mathbf{C}$ 上的复值(但不必全纯)函数. 它在 0 点的 Taylor 级数可以写作 $\Sigma F_{kl}\cdot z^k\bar{z}^l$.

命题 设场 F 当 z 平面旋转一个角 $2\pi/q$ 时，仍变为自身.这时系数 $F_{k,l}$，只当 $k-l\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$ 时,非 0 .

◀因为 Taylor 级数是唯一的,故当 z 旋转角 $2\pi/q$ 时,其每一项也旋转 $2\pi/q$。复平面上的点 $z^k\bar{z}^l$ 旋转一个角 $2\pi(k-l)/q$. 当上述条件满足时,这个旋转只当 $k-l\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$ 时，才与旋转 $2\pi/q$ 相同。▶

推论 在旋转 $2\pi/q$ 下,不变的微分方程形如

$$\dot{z}=zA(|z|^2)+B\bar{z}^{q-1}+O(|z|^{q+1}),\ (q>2).$$

◀考虑 $(k,\ l)$ 平面上满足关系式 $k-l\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$ 的整点.这些点位于平行于第一象限角平分线的射线上，这些射线起于相应于单项式 z, z^{q+1}, z^{2q+1}, $\cdots$; $\bar{z}^{q-1}$, $\bar{z}^{2q-1}$, $\cdots$的点处. 现在,我们在上述单项式中,求次数最低的单项式(图 142).

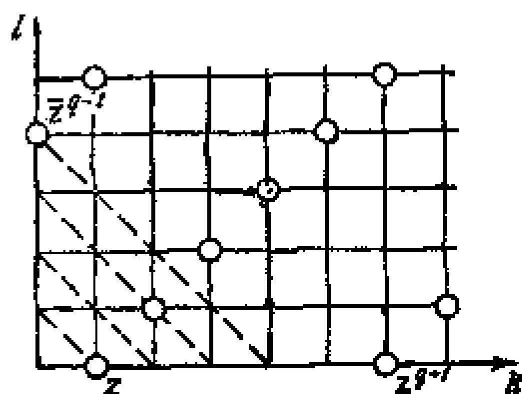


图 142

我们先在由点 z 发出的射线上依次得出几个单项式(即单项式 $z|z|^{2k}$)，然后是单项式 $\bar{z}^{q-1}$;所有其它单项式的次数不小于 $q+1$ (图 142). ▶

定义 以上方程略去 O 项，称为主方程,它对旋转 $2\pi/q$ 不变。主方程右方称为主 q-等度变化场.

例 对 3 阶与 4 阶旋转群不变的主方程是

$$\dot{z}=\varepsilon z+Az|z|^2+B\bar{z}^2;\ \dot{z}=\varepsilon z+Az|z|^2+B\bar{z}^3.$$

为了陈述有关含参数的等度变化向量场相图形态变化的分析结果,我们引进以下的定义对以后论述是很方便的.

B. 等度变化的遍有形变

在群 G 对相空间的作用下，考虑不变的并且含参数 λ 的向量场族 v_λ，λ 在 $\mathbf{R}^k$（称为族的底）的 0 点附近变化。底的维数称为族的参数个数。

族在点 $\lambda=0$ 处的芽，称为 v_0 的等度变化形变。

定义. 等度变化形变 v_λ 称为 v_0 的等度变化拓扑轨道遍有（简称遍有）形变，如果对 v_0 的任意等度变化形变 w_μ，均有形变的底的连续映射 φ 与相空间的一族同胚 h_μ，（h_μ 含有参数 μ 并与 G 的作用可换），满足：h_μ 将场 w_μ 的相曲线变为场 $v_{\varphi(\mu)}$ 的相曲线而且保持运动方向.

换言之，一个等度变化形变是遍有的，如果每个别的等度变化都拓扑轨道等价于由遍有的等度变化形变诱导出来的一个形变.

对于向量场芽以及对于具有特殊性质（例如在奇异点具有固定线性部分）的一类场中的形变，也有类似定义. 现在来作出遍有形变.

C. 主形变

考虑平面上（在旋转 $2\pi/q$，$q>2$ 下）不变的一个向量场.

定义 若一个场在零点的线性部分为零，则它称为奇异的.

定义 一个 q-等度变化主奇异场 $v_0(q>2)$ 的主形变，即两参数族 $v_\varepsilon=\varepsilon z+v_0$，两个参数就是复数 ε 的实部和虚部.

例 $q=3, 4$ 时，主形变由以下方程给出

$$\dot{z}=\varepsilon z+Az|z|^2+B\bar{z}^2,\quad \dot{z}=\varepsilon z+Az|z|^2+B\bar{z}^3,$$

其中 ε 是参数，而复系数 A 和 B 是固定的.

注 当研究环线由于一对复共轭乘子穿过单位圆周而失稳时，就产生了上面定义的情况. 在所有系统的函数空间中，具有这样一种穿过单位圆周情况的系统构成一个超曲面. 这个超曲面是包围稳定性区域的三个超曲面之一. 另外两个超曲面分别对应于有一个乘子在 $+1$ 或 -1 处穿过单位圆周.

对应于一对复共轭乘子，穿过单位圆周的超曲面的边缘由两部分构成(即两个在一切系统的函数空间中的余维数为 2 的曲面).其中之一对应于一对乘子 1，且构成一个二阶 Jordan 方块，另一个则对应于同样的但固有值为 -1 的 Jordan 方块。

研究在这种余维数 2 的曲面附近的失稳，导致研究平面上以一个二阶幂零 Jordan 方块为线性部分的，并且在旋转角度 $2\pi/q$ ($q=2$，对于乘子 -1；$q=1$，对于乘子 1) 下不变的二参数向量场族的分枝。为了把这些情况包括在一般的格式中，给出下面的定义就方便了。

D. $q=1$ 和 $q=2$ 的情况

定义 若平面向量场在旋转 $2\pi/q$ ($q=1$ 或 2) 下不变，而它在原点的线性部分是二阶幂零 Jordan 方块，则我们称它为**奇异的**。

换言之，对于 $q=1$ 或 2，奇异场就是其线性部分为方程 $\ddot{x}=0$ 在相平面 $(x, y=\dot{x})$ 上的相速度的场。

很容易证明下面的

定理 在平面的旋转 $2\pi/q$ ($q=1$ 或 2) 下，不变的奇异场必可用与旋转可交换的微分同胚化为方程

$$\ddot{x} = ax^3 + bx^2y + O(|x|^5, |y|^5) \quad (q=2),$$
$$\ddot{x} = ax^2 + bxy + O(|x|^3, |y|^3) \quad (q=1)$$

(在相平面 $(x, y=\dot{x})$上) 的相速度场。

◀上述场的线性部分是 $y\frac{\partial}{\partial x}$。作相应于此线性场的同调方程。为此，计算场 $A = y\frac{\partial}{\partial x}$ 与任意向量场 $h = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$ 的 Poisson 括弧。

我们可以依次算出

$$\left[y\frac{\partial}{\partial x}, P\frac{\partial}{\partial x}\right] = yP_x\frac{\partial}{\partial x},$$

$$\left[y\frac{\partial}{\partial x},\quad Q\frac{\partial}{\partial y}\right]=yQ_x\frac{\partial}{\partial y}-Q\frac{\partial}{\partial x},$$

$$[A,\ h]=(yP_x-Q)\frac{\partial}{\partial x}+yQ_x\frac{\partial}{\partial y}.$$

于是，关于未知函数 $(P,\ Q)$ 的同调方程就是方程组

$$yP_x-Q+u=0,\quad yQ_x+v=0.$$

这里 u、v 是已知函数，即(我们想用变量变换消除的)向量场 $w=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$ 的分量.

现在，我们来研究这个方程组。由前一方程求出 Q 并代入后一方程，有

$$y^2P_{xx}=-yu_x-v.$$

为使右方可以用 y^2 来除，只需在 v 中改变 y 的 0 次与 1 次幂。于是用 $v_0(x)+yv_1(x)$ 代替 v，即可使以上方程对 P 可解。

于是，对于任意的 $(u,\ v)$，同调方程是不可解的，但若在 v 上加一个适当的，y 的一次非齐次函数，则它为可解。换言之，方程

$$[A,\ h]+w=[v_0(x)+yv_1(x)]\frac{\partial}{\partial y},$$

对未知场 h 是可解的，这里 $(v_0,\ v_1)$ 是依赖于 w 的适当的函数。

最后，Poincaré 方法能用来消去所有向量值单项式，但除了场 $A+\cdots$ 任意次项中形如 $x^k\frac{\partial}{\partial y}$ 和 $yx^k\frac{\partial}{\partial y}$ 的项外。于是我们的方程可以在形式幂级数类中化为

$$\ddot{x}=a(x)+yb(x).$$

若原方程组在旋转角度 π 后不变(即为奇)，则原向量场的分量将为奇函数.这时，也可选 Poincaré 方法中的变换为奇的(即与此旋转可换)，因为在前面的公式中，$(P,\ Q)$ 和 $(u,\ v)$ 的次数相同。于是在形式的标准形中，$(a,\ b)$ 的级数只有奇次项.

只需限于 Poincaré 方法的少数前几次逼近，即得上述命题.▶

定义 $q=2$ 和 $q=1$ 时的**主奇异方程**和**主奇异场**就是方程

$$\ddot{x} = ax^3 + bx^2y\ (q = 2),\quad \ddot{x} = ax^2 + bxy\ (q = 1),$$

及它们在相平面 $(x, y = \dot{x})$ 上定义的场.

定义　$q = 2$ 和 $q = 1$ 时主奇异场的**主形变**，是对相应的二阶方程右方加上一项 $\alpha x + \beta y$ $(q = 2)$ 或 $\alpha + \beta x$ 的形变.

强共振时(即 $q \leqslant 4$ 时),q-等度变化场的主形变可列举于下：

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar{z}^3,\quad q = 4,$$

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar{z}^2,\quad q = 3,$$

$$\ddot{x} = \alpha x + \beta y + ax^3 + bx^2y\quad q = 2,$$

$$\ddot{x} = \alpha + \beta x + ax^2 + bxy,\quad q = 1.$$

这里变量 z, ε A, B 是复的，x, y, α, β, a, b 是实的，形变的参数用希腊字母表示,而且 $y = \dot{x}$.

E.　主形变的遍有性

"定理"　对任意 q，所有主奇异场均可分为蜕化的与非蜕化的场,使得

(1)　蜕化场构成(所有主奇异场空间中)有限个子流形之并;

(2)　非蜕化场是有限多个开连通域之并;

(3)　非蜕化场在零点的芽的主形变是遍有的;

(4)　在各连通分支中,非蜕化场的所有的芽的主形变为拓扑等价的.

"定理"一语加上了引号是因为当 $q = 4$ 时,定理还未被证过.

除 $q = 4$ 时以外,非蜕化性条件可显式表为

$$a \neq 0,\ b \neq 0,\ 若\ q = 1, 2;$$

$$\mathrm{Re}A(0) \neq 0,\ B \neq 0,\ 若\ q = 3.$$

当 $q = 4$ 时，至少还要加上以下条件(在附加题一节中(见附加题(3),(4),显然还指出了其它条件):

$$|A|^2 \neq |B|^2,\ |\mathrm{Re}A| \neq |B|,$$

$$|\mathrm{Im}A| \neq (|B|^2 + \mathrm{Re}^2A)\sqrt{|B^2 - \mathrm{Re}^2A|}.$$

(又见：A. H. Wan [1]; A И Нейштадт [4] Ф. С. Вересовская, А. И. Хибник [1]——英译本注).

由此定理容易得到下面的推论.

推论 在旋转 $2\pi/q$ 的整数倍的旋转群下不变的向量场的两参数族的函数空间中,只在参数的孤立值处为奇异的场之族,形成一个开的[1]处处稠密集. 在这些值附近,此族拓扑等价于一非蜕化主奇异场的遍有形变.

换言之,设平面上一个旋转 $2\pi/q$ 的整数倍后不变的向量场的线性化的固有值为0. 考虑一个通有的具有此性质的场. 我们来作它的两参数形变,使之在具有同样的对称性的场中为通有.

可以断言,点0具有一个不依赖于参数的邻域,使在其中这样作出的形变可以用一同胚化为§35 C, §35, D 那样的标准形式,而且这个同胚具有同样的对称性,并连续依赖于参数. 更确切地说,相应方程组的相图可用这些同胚化为标准形式.

所以,上述定理把对一切分枝的描述化成了对非蜕化奇异场的主形变的分枝的描述.

F. 分枝的描述

当 $q=1$ 时,上述定理是 Богданов 在1971年证明的(见 §33,那里还有对分枝的描述).

当 $q=2$ 时,对时间作变换,可使 $b<0$. (α,β) 平面上的分枝图("标度盘")以及 $a>0$ 和 $a<0$ 时相图的形态变化可见图143.

当 $q=3$ 时,对时间作变换,可使 $\mathrm{Re}A<0$. 分枝图和形态变化见图144.

当 $q\geqslant 5$ 时,对时间作变换,可使 $\mathrm{Re}A<0$; 分枝图和形态变化见图 145. 注意,不动点的存在区域从一个很窄的舌形趋向虚 ε 轴,舌形的边界具有公切线如下:

$$\mathrm{Im}\varepsilon\approx f(\mathrm{Re}\varepsilon)\pm c|\mathrm{Re}\varepsilon|^{(q-2)/2},\quad q\geqslant 5.$$

当 $q=5$ 时,定理和以上论断的证明,很简单;当 $q=1$ 时,证

[1] 若底是非紧的,则还要加上通常的限制.

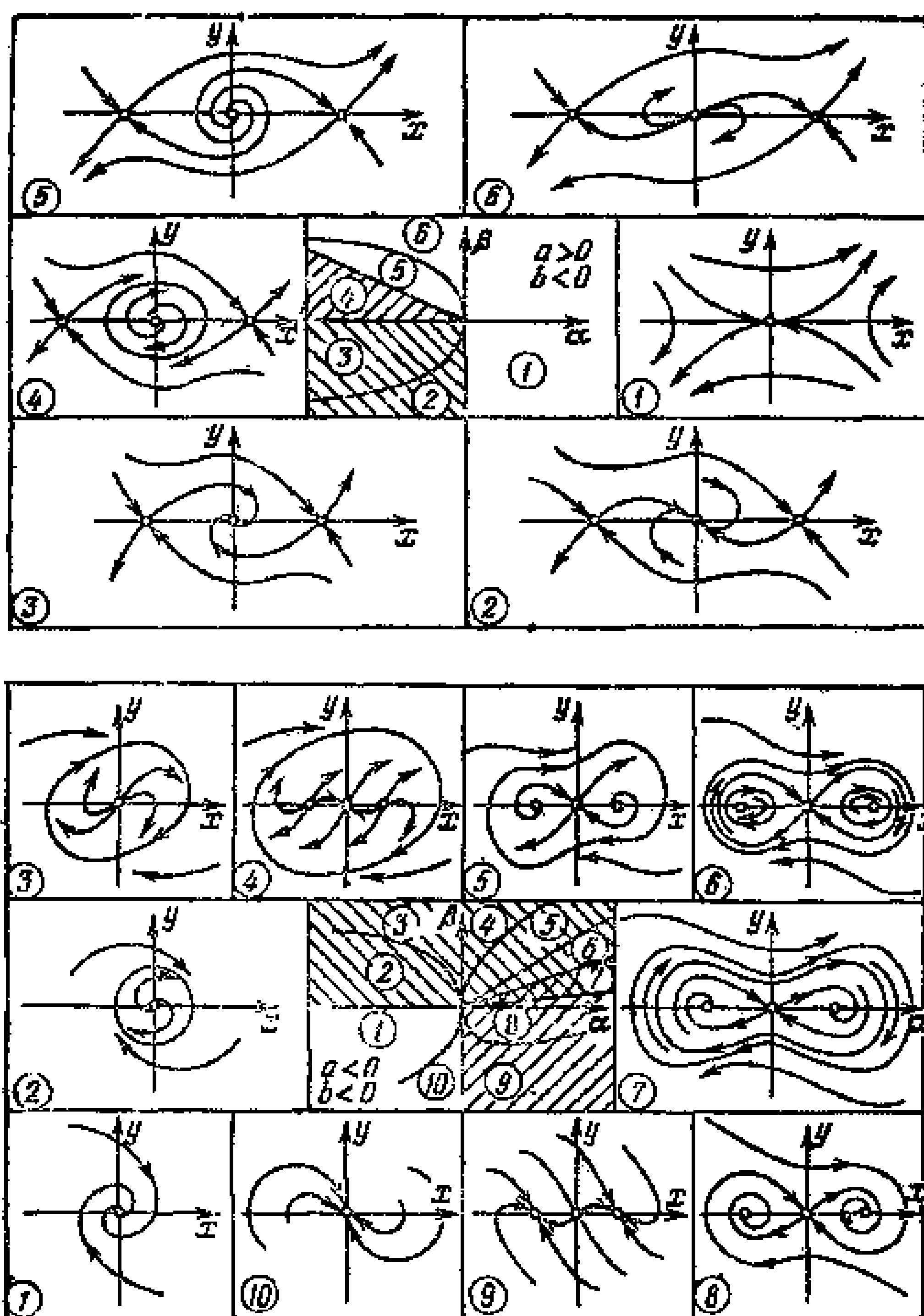


图 143

明可见 §33 中所引 Богданов 的文章: $q = 4$ 时,还未证过, $q = 2$
3时, 我们可以简述于下. $q = 4$ 时的某些形态变化也画在下面 (图 149, 150, 152) (又见附加题 (1)—(4)).

G. 三阶对称性的情况

1. 设 $A = 0$. 这时方程组可以从一个 Hamilton 方程组通

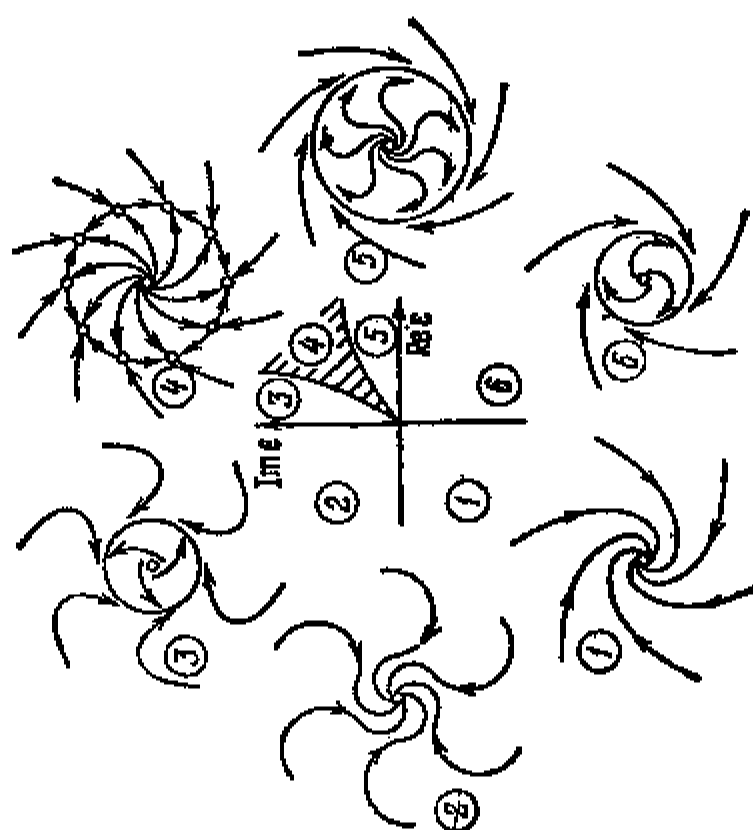


图 145

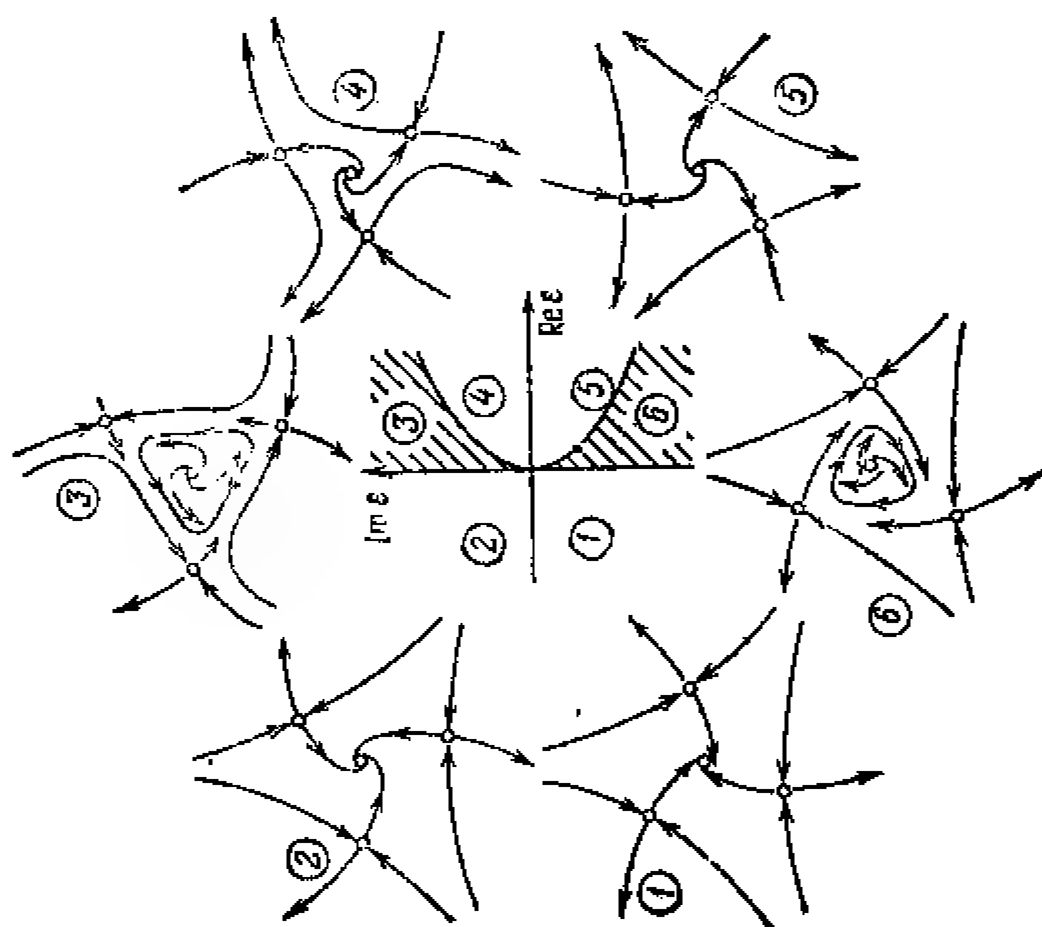


图 144

过场的旋转而得. 具体地说，考虑由奇点(鞍点)所成的等边三角形。它的三边决定了三个非齐次线性函数，它们的积即所求 Hamilton 函数。

这个函数沿方程组 $\dot{z} = \varepsilon z + B\bar{z}^2$ 的解的导数的符号由参数 ε 实部的符号决定. 这使我们能用这个函数作为 Ляпунов 函数. 所以，$A = 0$ 时，研究主形变没有困难。

2. 一般情况下，可用变换 $t = T/|\varepsilon|$，$z = Z/|\varepsilon|$ 将原方程组化为

$$\frac{dZ}{dT} = EZ + \bar{Z}^2 + |\varepsilon| AZ|Z|^2, \quad E = \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}.$$

在 $|Z|$ 远小于 $1/\varepsilon$ 的区域中，第三项可以看作小摄动. 在 E 的幅角不接近于 $\pm\pi/2$ 处，这个摄动不会改变 1. 中得到的图象. 但若 E 的实部远小于其虚部，则此方程组可以看作是以下的 Hamilton 方程组的小摄动：

$$\frac{dZ}{dT} = \pm iZ + \bar{Z}^2.$$

未摄动前的 Hamilton 函数 H 在 1. 中讲过了.

3. 考虑 H 沿方程组解的变化率. 在等值曲线 $H = h$ 上积分，即得由此曲线生成环线的条件 $\oint \mu r^2 + \lambda r^4 d\varphi = 0$，这里 $\mu = -\sigma/\tau$，$\lambda = a\tau$，$\varepsilon = \sigma + i\tau$，$A = -a + ib$，$r$ 和 φ 是平面极坐标.

用 ρ 记椭圆曲线 $H = h$ 所围成的区域的惯性半径. 于是由曲线 $H = h$ (当 $|\varepsilon|$ 穿过 0 时)生成环线的条件可以写为 $\sigma = \rho^2\tau^2 a$.

ρ 的最大可能值对应于鞍点的分离曲线所成的三角形. 函数 $\rho(h)$ 是单调的(见 §35，I).

4. 主族的遍有性以及分枝图和相图的形状余下部分的证明可以和 $q = 1$ 时同样进行.

H. 二阶对称性的情况

1. 将 x 展开并改变时间与参数，我们可以把族化为

$$\dot{y} = \alpha x + 2\beta y + ax^3 + bx^2y, \quad a = \pm 1, \quad b = -2.$$

下面研究这个带有参数 (α, β) 的族。

2. 若 $|\beta| \leqslant \sqrt{|\alpha|}$，作变换 $x = \sqrt{|\alpha|/|a|}x' \quad t = t'/\sqrt{|\alpha|}$，可把 $|\alpha|$ 与 $|a|$ 变为 1。我们将得到一个几乎 Hamilton 方程组，其 Hamilton 函数为

$$H = \frac{y^2}{2} - \operatorname{sgn}\alpha \frac{x^2}{2} - \operatorname{sgn}a \frac{x^4}{4}.$$

耗散项形如

$$2\beta' y + b' x^2 y, \quad \beta' = \frac{\beta}{\sqrt{|\alpha|}}, \quad b' = \frac{\sqrt{|\alpha|}b}{|a|}.$$

3. 沿等值曲线 $H = h$，积分 H 的变化率，即得环线(恰由此曲线当 α 与 $\beta = u\alpha$ 穿过 0 时)生成的条件：$u = r^2$，这里

$$r^2 = \iint x^2 dx dy \Big/ \iint dx dy,$$

是曲线 $H = h$ 所围区域对 y 轴的惯性半径的平方。

4. 若 $|\alpha| \ll |\beta|$，可作变换 $x = \lambda x'$，$t = \varkappa t'$ 将 $|a|$ 变为 1，将 $|b|$ 变为 $|\beta|$，这里

$$\lambda = \sqrt{|\beta/b|}, \qquad \varkappa = \sqrt{|b/\beta|}.$$

可得 $\alpha' = |b/\beta|\alpha$，$b' = \sqrt{|\beta/b|}b$，$\beta' = \sqrt{|b/\beta|}\beta$，$a = a$：

$$\dot{y} = ax^3 + \beta' 2y(1 \pm x^2) + \alpha' x.$$

这里参数 $\beta' \sim \sqrt{|\beta|}$ 和 $\alpha' \sim \alpha/\beta$ 都很小。当 $\beta' = 0$ 时，可得以下的 Hamilton 函数：

$$H = \frac{y^2}{2} - \frac{\alpha' x^2}{2} - \frac{ax^4}{4}.$$

证明的其余部分可如常进行。

I. 椭圆积分的零点

上面已经表明，研究族中环线的性态可以化为求解以下的"弱的 Hilbert 第十六个问题"：

令 H 为 (x, y) 的 n 次实多项式，P 是 (x, y) 的 m 次多项式。

下面的函数可能有多少个实零点？

$$I(h)=\iint\limits_{H\leqslant h} P\,dx\,dy.$$

为研究二阶对称性，我们需要

$$P=\mu+\alpha x^2,\quad H=\frac{y^2}{2}-\frac{\alpha x^2}{2}-\frac{ax^4}{4}.$$

对 $P=\mu+\alpha x^2$ 问题化为研究函数 $r(h)$ 的单调性。r 是一个环线围成的区域对 y 轴的惯性半径。

引理 在 H 的临界值之间的区间上，函数 r 的性态如下表：

α 与 a 之值	$-1,\ +1$	$+1,\ 1$	$+1,\ -1$	$-1,\ -1$
h 的区间	$0,\ \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$, [illegible]	$0,\ +\infty$	$0,\ +\infty$
r 的性态	↑	↓	↓↑	↑

（在第三种情况下，r 先降后升）。

在 Богданов 的工作中，就已用到了椭圆积分的一个类似的（但较弱的）定理。Богданов 的证明中有冗长的计算。Ю. С. Ильяшенко对这里的引理和 Богданов 的引理都给出了另外证法，该证法不以计算为基础，而依靠复变量的拓扑的论证（单值性以及 Picard-Lefshetz 公式）。[见 Ю. С. Ильяшенко [2]，[4]]。

J. 4阶共振的情况

原方程是 $\dot{z}=\varepsilon z+Az|z|^2+B\bar{z}^3$。

设 $B\neq 0$。对 z 作伸展和旋转并对时间作伸展可以将方程化为

$$\dot{z}=\varepsilon z+Az|z|^2+\bar{z}^3.$$

改变时间的符号并变 z 为 $\bar{z}$，可使 $\mathrm{Re}A\leqslant 0$，$\mathrm{Im}A\leqslant 0$。

先研究非零的奇点。

1 奇点的分枝。在研究奇点随 ε 的变化而分枝时，以下的辅助的作法是有用的。令 $z=re^{i\varphi}$ 是奇点。这时

$$-\varepsilon/r^2 = A + N,\ N = e^{-4i\varphi}.$$

所以考虑以A为心，1为半径的圆(图146)．使z点为奇点的值ε，位于连结零点与圆周上$A+N$点的射线的反向延线上．圆周上的点越接近零，ε的模越大．

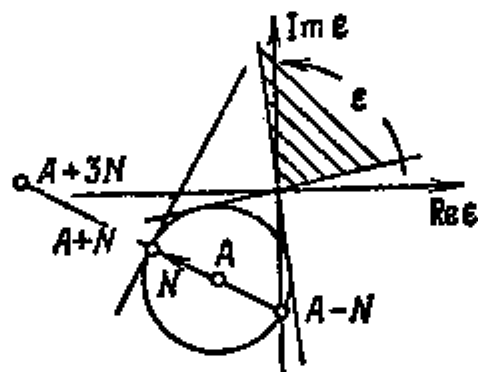


图 146

由上述的可知，$|A|$小于或大于1的情况大不相同．若$|A|<1$，零点全在圆内．这时对任意ε(除0以外)，方程在一正方形的顶点上有四个奇点．若ε绕0一周(旋转360°)，奇点正方形反向转90°．

另外，若$|A|>1$，则在变量ε平面内，有一个由此圆的切线张的角．对于角域内的ε，有八个奇点，而对角外的ε则没有．当ε开始由角的一边向另一边转动时，在正方形的四个顶点上出现四个奇点：这个正方形很快就分裂为二．然后相近的奇点开始分开．当ε转到角的另一边时，第一个正方形的奇点都消失，而与原来距它90°的第二个正方形的奇点重合(所以有一个奇点正方形相对于另一个转90°)．

2. 线性方程奇点的类型．先从一个引理开始，它使我们很容易研究平面上线性向量场奇点的类型，这个场可用复形式写为

$$\dot{\xi} = P\xi + Q\bar{\xi}.$$

引理 奇点0的类型不依赖于Q的幅角．当$|P|<|Q|$时，它是鞍点；当$|\mathrm{Im}P|>|Q|$时，是焦点；而当$|\mathrm{Im}P|<|Q|<|P|$时，它是结点；当$\mathrm{Re}P<0$时，焦点为稳定；当$\mathrm{Re}P>0$时，不稳定(图147)．

◀用复数λ乘ξ时，系数P不变，而系数Q则被乘以$\lambda/\bar{\lambda}$．选择λ可使Q的幅角为任意；这样证得了第一个论断．为证明第二个论断考虑$Q=1$的情况．令$P=\alpha+i\beta$．以$(1,i)$为基底写出方程的矩阵．这个矩阵是

$$M=\begin{pmatrix}\alpha+1 & -\beta\\ \beta & \alpha-1\end{pmatrix},\ \mathrm{tr}M = 2\alpha,\ \det M=\alpha^2+\beta^2-1.$$

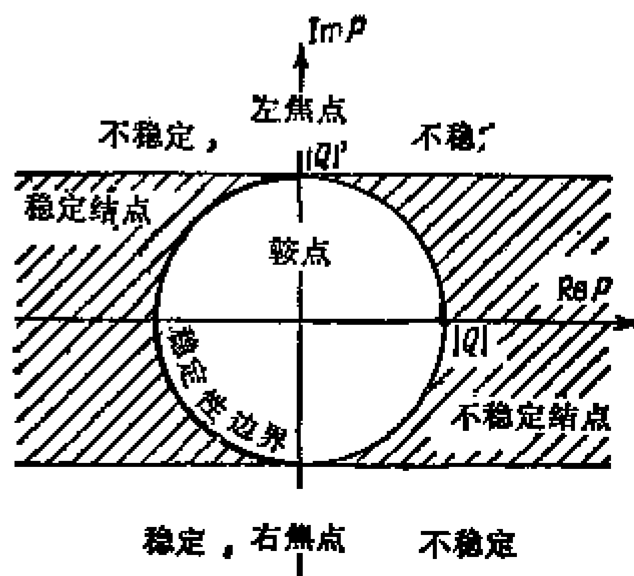


图 147

所以特征方程的根是

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{1-\beta^2}.$$

它们为相异实根的条件是 $|\beta| < 1$. 当 $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ 时，它们的符号相反. 故当 $Q = 1$ 时，引理得证. 对于任意的 $|Q|$ 的关于鞍点，结点和焦点的条件，可由相似性考虑得出：当时间改变时，P 与 Q 被乘以了同样的实数. ▶

图 147 显示了结点，焦点和鞍点在函数空间中的相对位置. 在关于平面奇点的分枝的一切研究中，记住这一点都是有用的.

3. 鞍点的研究. 回到原来的非线性方程. 令 $z_0 = re^{i\varphi}$ 为一奇点. 在此点将原方程线性化. 令 $z = z_0 + \zeta$. 保留右方 ξ 和 $\bar{\xi}$ 的一次项，即得

$$\dot{\xi} = P\xi + Q\bar{\xi},\ P = r^2(A-N),\ |Q| = r^2(A+3N).$$

引理 若 $|A| < 1$，则所有奇点都是鞍点. 若 $|A| > 1$，则对任意 ε，模较小的奇点是鞍点，模较大的奇点不是鞍点.

◀由 2. 中的引理，鞍点条件是 $|A-N| < |A+3N|$. 考虑图 146 的点 $A-N$ 和 $A+3N$. 它们对 $A+N$ 对称，而且连线穿过点 A. 它们中的谁更接近 0，要由 0 点位于圆在 $A+N$ 点的切线的哪一侧来决定. 若 $|A| < 1$，0 点总和点 $A-N$ 位于切线的同侧. 若相反 $|A| > 1$，则过原点作两切线，分圆周为两段弧，答

案视 $A+N$ 位于圆的哪一段弧而定。 距 0 较远的弧对应于鞍点，较近的对应于奇点（§35 J 1.)。

4. 奇点的稳定性。 对应于圆周朝向 0 点弧的奇点可以是结点或焦点。弧上靠近过 0 的切线的部分对应于结点；沿弧运动时结点可以变成焦点而焦点会改变稳定性。我们想找出在什么条件下焦点的稳定性会变化。

由 2. 的引理和 3. 的公式，可知当 $A-N$（$A+N$ 的对径点）通过虚轴而 $A+N$ 位于面向 0 的弧上时，稳定性会变化。把发生这个现象的 A 点分开的边界由以下条件决定：过圆与虚轴之交点的直径垂直于过 0 的切线。容易算出，边界方程为

$$|\mathrm{Im}A| = \frac{1+\mathrm{Re}^2A}{\sqrt{1-\mathrm{Re}^2A}}.$$

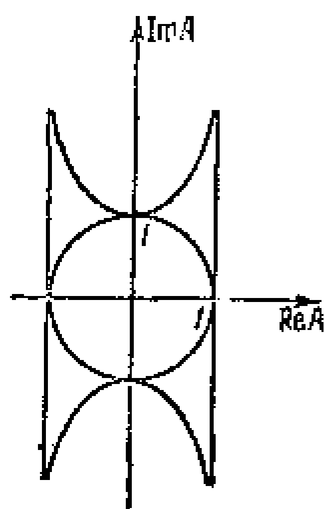


图 148

A 平面上的相应曲线在点 $A=\pm i$ 切于圆 $|A|=1$，而以直线 $|\mathrm{Re}A|=1$ 为渐近线(图 148)。

5. 在无穷远处的性状。 对于大的 z，可以略去 εz 这一项。令 $w=z^2$，即得线性方程

$$\dot{w}=2Aw+2\bar{w}.$$

我们应用 2. 的引理来研究这个方程。故当 $|A|<1$ 时，w 平面上的奇点是鞍点；而当 $|A|>1$ 时，若 $\mathrm{Re}A<0$，则来自无穷远的所有轨道都被吸引到一有限区域中。

6. 相图的分枝。 $|A|<1$ 时，图形(图 149)很明显地与三阶共振一样（见 §35, G)。若 $|\mathrm{Re}A|>1$，则显然和 5 阶或更高阶

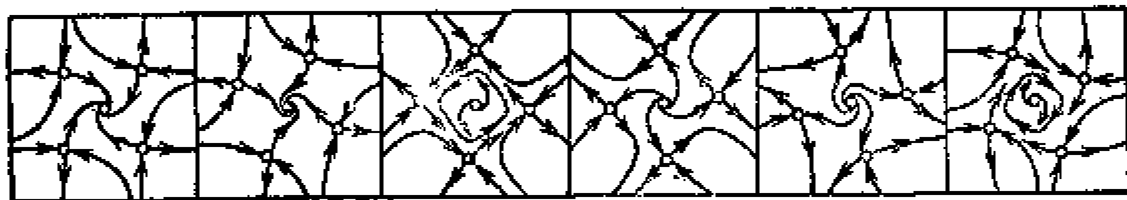


图 149

共振一样(图 150、145);然而，这时奇点也可能不产生在环线上(见附加题(1)、(2)、(3))。

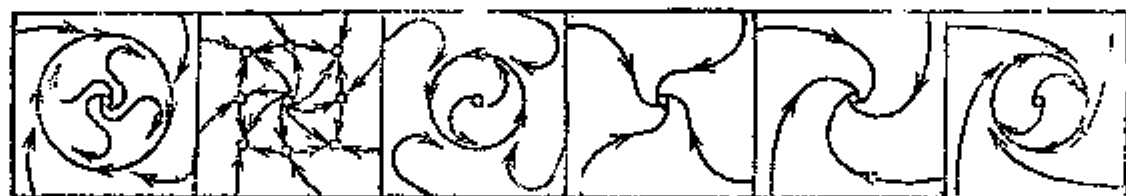


图 150

主要的困难在 $|\mathrm{Re}A|<1$，$|A|>1$。

7. 新的规则化与新的记号。为了研究 $|\mathrm{Re}A|<1$ 的情况，考虑 $|\mathrm{Im}A|\to\infty$ 的渐近情况很有用。可以在原方程中，令 B 趋向 0 (而不令 A 趋向 ∞)。为了研究这个情形，引用记号

$$\varepsilon=\sigma+i\tau,\ A=-i\alpha-\gamma,\ B=\beta,$$

并设 β、$\sigma=u\beta$ 和 $\gamma=v\beta(\beta\to 0,\ u\sim v\sim 1)$ 都是同样数量级的小参数。

选用乘子将坐标的展开式和时间都规则化，使得 $\alpha=1$，$\tau=1$。引入辛极坐标 $\rho=|z|^2/2$，$\varphi=\arg z$。

这时原方程成为方程组

$$\dot\rho=2\rho(\sigma-2\gamma\rho+2\beta\rho\cos 4\varphi),$$

$$\dot\varphi=\tau-2\alpha\rho-2\beta\rho\sin 4\varphi.$$

再引入 Hamilton 函数 $H=\tau\rho-\alpha\rho^2-\beta\rho^2\sin 4\varphi$ 和位势 $\Pi=\sigma\rho^2-4\tau\rho^3/3$。这时

$$\dot\rho=-H_\varphi+\Pi_\rho,\ \dot\varphi=H_\rho.$$

若 $\tau=\alpha=1$，$\sigma=u\beta$，$\gamma=v\beta$，这恰好是我们关心的，这时有

$$H=H_0+\beta H_1,\ \Pi=\beta\Pi_1,\ H_0=\rho-\rho^2.$$

$\beta=0$ 时得未摄动的运动(频率为 H_ρ 的旋转)。在 $H_\rho\neq 0$ 处(即 ρ 不接近 1/2 处)，基本的摄动效应是耗散项 $\beta\Pi_1$ 给出的，当 $\rho\approx 1/2$ 时，还要考虑到 βH_1。

8. 小耗散效应的引理。在相平面上考虑方程 $\dot x=v+\varepsilon w$，v 是 Hamilton 场，Hamilton 函数为 H，w 是位势场，$w=\nabla\Pi$

(利用辛坐标 p, q 给出的度量)。

引理 令 H 绕闭相曲线一周的增量为 δH。则

$$\frac{d}{d\varepsilon}\delta H|_{\varepsilon=0} = \iint_{G(h)} \Delta\Pi dpdq,$$

ε 是小参数, $G(h)$ 是此曲线所围的区域.

◀ $$\delta H \approx \oint \dot{H} dt = \oint [H_p(-H_q + \varepsilon\Pi_p) + H_q(H_p + \varepsilon\Pi_q)]dt$$

$$= \varepsilon\oint \Pi_p d_q - \Pi_q d_p = \varepsilon\iint \Delta\Pi d_p d_q. ▶$$

将它应用到我们的方程,有

$$\delta H_0 = 2\rho(\sigma - 2\gamma\rho) = 2\beta\rho(u - 2v\rho).$$

因此,环线的一次近似可以由下式给出:

$$\rho = u/(2v) = \sigma/(2\gamma).$$

这个方法能用来在环线外 ρ 接近 1/2 处研究方程组. 因此, σ 接近 γ 的情况需要单独研究.

9. $\rho \approx \frac{1}{2}$ 的情况. 作变换 $\rho = \frac{1}{2} + \sqrt{\beta}P$, $t/\sqrt{\beta} = T$ 并令 $\beta = 0$. 于是我们得到 Hamilton 方程组作为近似:

$$\frac{dP}{dt} = w + \cos 4\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -2P$$

其 Hamilton 函数为

$$H_{00} = P^2 + w\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi.$$

(这是具有扭矩的摆). 这里 $w = u - v = (\sigma - \gamma)/\beta$.

在 $|w| < 1$ 处有势阱.

应用 7. 中的记号,我们已把场 $(\sigma - \gamma)\partial/\partial\rho$ 从位势部分转到 Hamilton 函数部分了. 所以新的 Hamilton 函数和位势各为

$$H = \rho - \rho^2 - \beta\rho^2\sin 4\varphi - \beta w\varphi$$

$$\Pi = \sigma\rho^2 - \frac{4\gamma\rho^3}{3} - (\sigma - \gamma)\rho.$$

应用 8. 的引理,得知

$$\delta H = \oint\!\!\oint (2\sigma - 8\gamma\rho)d\rho d\varphi \text{ 在势阱内}$$
$$= 2S(\sigma - 4\gamma\rho_0),$$

S 是 (ρ, φ) 平面中势阱内的面积，ρ_0 是阱的重心的坐标。

产生环线的条件是 $\sigma = 4\gamma\rho_0$。所以需要计算 ρ_0。但 $\rho_0 = \frac{1}{2} + \sqrt{\beta}\,\rho_1 + \cdots$。所以产生环线的条件是 $\sigma = 2\gamma + 4\gamma\sqrt{\beta}\,\rho_1 + \cdots$，$w = (\gamma/\beta) + 4\gamma\rho_1 + \cdots$。

现在计算 ρ_1。在坐标 (P, φ) 下，封闭相曲线 $H = \text{Const.}$ 的准确方程是

$$P^2 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\beta}\,P\right)^2 \sin 4\varphi + w\varphi = h.$$

对于势阱中的每一个 φ 都有两个 P 与之相应，而且有

$$P_1 + P_2 = -\sqrt{\beta}\sin 4\varphi/(1 + \beta\sin 4\varphi).$$

由此式可知，我们在上面记作 ρ_1 的修正项是

$$\rho_1 = -\frac{1}{2}\overline{\sin 4\varphi}.$$

（“——”表示沿 $\beta = 0$ 时的未摄动相曲线作“平均”。）

考虑势阱相对于 $\sin 4\varphi$ 的极大极小的位置及其随着 w 的变化（图 151），即可得到关于 ρ_1 的性态的信息，形态变化图就是以这种性态为基础的（图 152）。

图 152 所画的形态变化的系统是当 $|\mathrm{Im}A|$ 比 $|B|$ 很大，而且

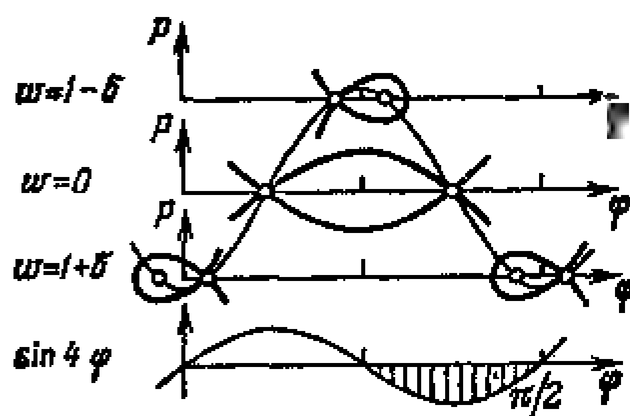


图 151

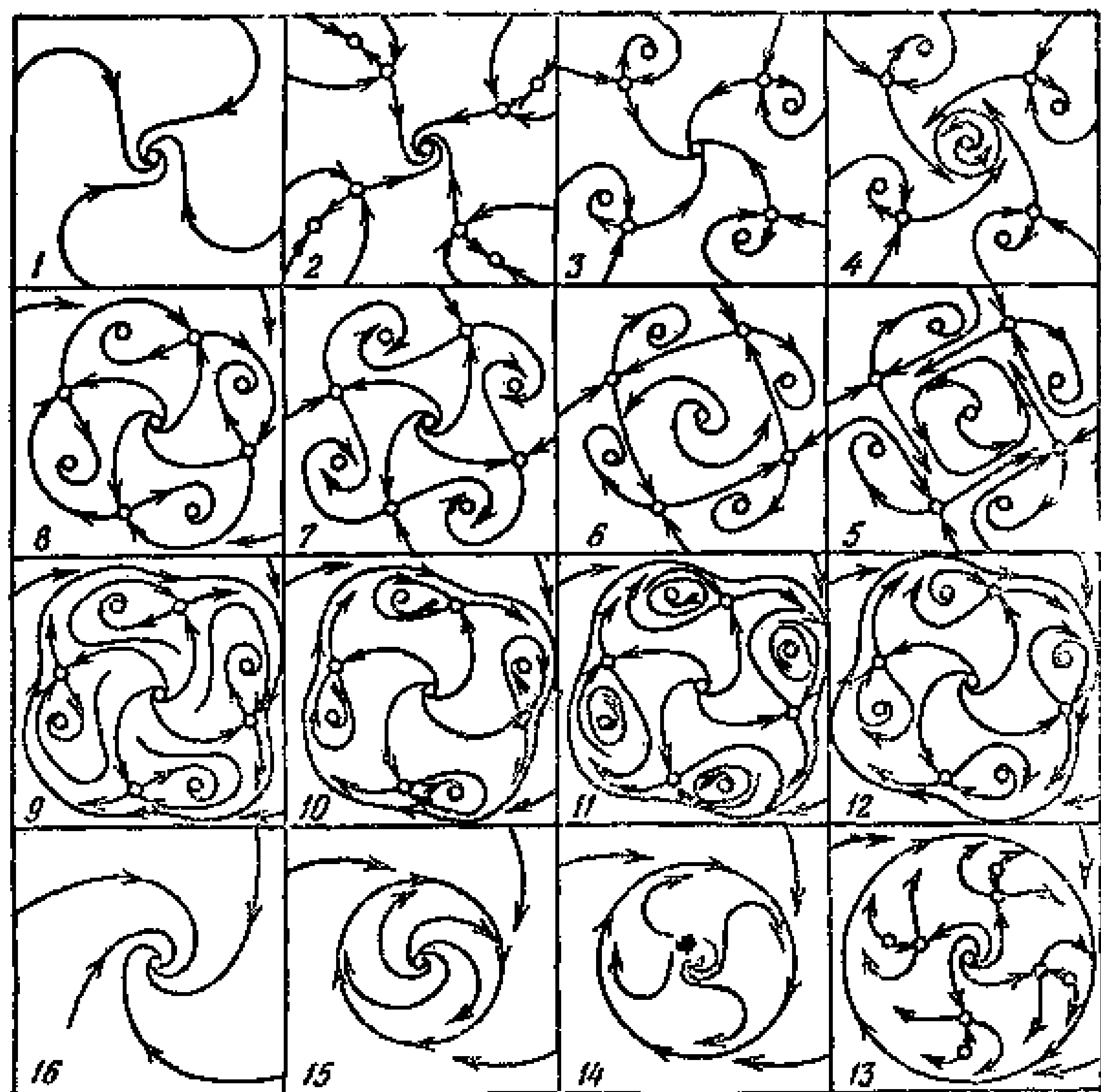


图 152

$0<|\mathrm{Re}A|<B$ 时,实现的。

当然,上面的论述不能代替证明,而只是研究 4 阶对称方程的主族的分枝的最初几步。

对称性阶数 $q\neq 4$ 时的结果,很明显早就为专家所知了,例如可见 V. K. Melnikov [1]. F.Taken 曾在 1974 年的一篇预印本中,宣布过这些结果,但证明迄今未发表。我们的叙述依据作者的 [12]; 详细证明是 Э. Хорозов [1] 给出的。

K. Poincaré 映射

把以上的作法用来研究环线的失稳是以下面的引理为基础

的。

引理 1 考虑一个映射 $f:(\mathbf{R}^2,0)\to(\mathbf{R}^2,0)$，设它有不动点 0 与固有值 $e^{\pm 2\pi i p/q}$（当 $q=1$ 或 2 时，有一个二阶 Jordan 方块）。这时 f 的 q 次迭代 f^q 在 0 的充分小邻域中，可以写为 $f^q=g+h$，$h(z)=O(|z|^N)$，N 是任意整数，而 g 是一个在微分同胚 γ 的 q 阶有限循环群下不变向量场的相流变换。

特别是要注意，g 与旋转一个角 $2\pi/q$ 可交换。f^q 本身一般地不与任意有限群的作用可交换，且不能包含在一个流中。然而引理 1 指出 f^q 在形式级数水平上包含在流中，且与一有限群可交换。

◀引理证法与作 Poincaré-Dulac-Birkhoff 标准形的通常的格式(见第五章)一样。▶

引理 2 考虑满足引理 1 的条件映射 $f=f_0$ 的形变 f_λ。这时 f_λ^q 可以在 0 的充分小邻域中写成 $f_\lambda^q=g_\lambda+h_\lambda$，$h_\lambda(z)=O(|z|^N)$，$N$ 是任意整数，而 g_λ 是在某个微分同胚 γ_λ 的有限循环群下不变的向量场 v_λ 的相流变换。f_λ，g_λ，h_λ，γ_λ 和 v_λ 都光滑依赖于在 0 附近变化的参数 λ。

◀证明依据以下的事实：将次数不高于 N 的项化为标准形而保留共振项，可以用光滑依赖于参数的微分同胚来实现。▶

把引理 2 与上面各段中所述联结起来，就可以得到映射 f 的不动点 0（或一个以 f 为 Poincaré 映射的周期运动）失稳的信息。

注 也可以直接将微分方程族，在 q 重覆盖空间中的 (p,q)-共振周期运动附近，化为标准形。这时，应用标准的 Poincaré-Dulac-Birkhoff 方法可将对时间有 2π 周期的向量场族化为一个不依赖于时间的 q-对称场与周期为 $2\pi q$ 的余项 $O(|z|^N)$ 之和。

L. 讨论

1. 为将以上结果化为周期解分枝的语言，需将平面上的不动点化为空间的封闭轨道，而将不动点的分离曲线化为闭轨的吸引与排斥不变曲面，平面上的极限环化为不变环面。只有分离曲线

的形态变化有本质的区别：平面上分离曲线在分枝时立刻彼此互相穿过，在空间中这个过程将被拖长而形成等斜(或混斜)[1]图形(图 10.1)。

空间的不变环面当环线达到分离曲线的环以前就会分解；但所有这些纯三维的效应比上面考虑的二维效应都是弱的(它们是由标准形式中的任意高次项产生的)。

2. 把失稳看作两参数而不是单参数现象，可使我们很容易理解一些很使人惊奇的现象。

考虑一个两参数族，并以乘子为参数。 在参数平面上作出某些周期解的存在域，这些周期解接近于沿基解转 q 圈并且 p 次穿过基解。 这个区域以狭窄的舌形在点 $e^{2\pi ip/q}$ 处接触单位圆(这里 $q > 4$，而舌形的宽度在距离圆周 σ 处之数量级是 $\sigma^{(q-2)/2}$，见 F). 所以乘子平面上的通有的曲线将在单位圆附近穿过无穷多个舌形(图 153)。

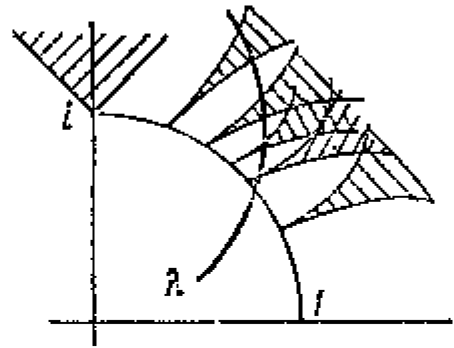


图 153

所以，若在一个通有的单参数族中有环线失稳，而没有强的共振，则在失稳时间附近有无穷多个长周期环线生成或消失。

证明这一事实而不用到在失稳时弱共振的存在，是由 В. С. Козякин [1] 作出的。

3. 考虑强共振的分枝图上的通有的曲线(§ 35, F)，可以描写一串形态变化，它们是万有的，但从单参数观点看来似乎是非局部的。

例如，当 $q = 2$ 时，可能出现这样一串事件：一个环线软失稳而且形成一个环面，后者又很快地沿一个纬圈被夹紧，使得子午线的形状变成“8”字形，在接近“8”字形的中心处(那里有一个不稳定环线)，吸引集在等倾分离曲线附近被破坏，但仍留在环面附近，

1) 等斜(混斜)图即一个(或两个)闭轨的稳定与不稳定不变流形在截平面上的截口所形成的网。

而子午线几乎变成了8字形（Ю. И. Неймарк）。

这时，相轨道绕着被破坏的环面的一半，然后再绕着其另一半转圈，就好象随机地由一侧跳到另一侧。

这里所描述的很像 С. Я. Герценштейн，和 В. М. Шмидт [1] 在数值实验中所观察到的现象。

§ 36. 共振时拓扑的形态变化

向量场在恒定点线性部分的固有值间的共振，妨碍了选取坐标系以使此场成为线性的。即使没有共振而只是固有值很接近于共振值使得 Poincaré 级数发散，也不能用解析的坐标变换把方程组变为线性的。

然而，在恒定点的实邻域共振时，相图的拓扑型通有地是不变的。例如，若所有固有值的实部均为负，则恒定点是吸引的而方程组拓扑等价于标准的线性组而不受共振影响。

事实上，在共振时，拓扑型确会改变，但通常只是在复域中改变。

通有的方程组是非共振的。在单参数族中可能遇到不可消除的共振。所以在研究共振对拓扑的形态变化的效果时，必需考虑向量场的单参数族。按照上面所说的，令所有的相变量，时间和参数都是复的。

A. Poincaré 域中的共振

在奇点0附近考虑复的相曲线。它们构成一个(具有两个实维的叶片的)叶层构造。为了分析奇点的构造，用以原点为心的小半径球截此叶层构造。

设在坐标 $(z_1, \cdots, z_n)$ 中，方程组的线性部分是对角形的：$\dot{z}_j = \lambda_j z_j + \cdots,\ j = 1, \cdots, n$。

定理 若固有值组 $\{\lambda_j\}$ 属于 Poincaré 域，则每个半径充分小的球面 $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = r^2$ 横截于此叶层构造。

◀先考虑线性方程组。我们有

$$dr^2 = \sum \bar{z}_j dz_j + z_j d\bar{z}_j = A dt + \bar{A} d\bar{t},\quad A = \sum |z_j|^2 \lambda_j.$$

横截于球面的条件，即 1 次形式 dr^2 在叶层的切平面上不为 0。但仅当 $A = 0$ 时，$Adt + \bar{A}d\bar{t}$ 为0。$A = 0$，在 Poincaré 情况(且仅当此时)下，对任意 $z \neq 0$ 不成立。所以在线性情况下定理得证：叶片与球面交于非 0 角 $\alpha(z)$。

考虑角 $\alpha(z)$ 在球面 $|z| = r$ 上的最小值 α_0。量 α_0 不依赖于 r (因 $\alpha(cz) = \alpha(z)$)，所以对一切 $z \neq 0$，$\alpha(z) \geqslant \alpha_0 > 0$。

现在转到非线性方程组。非线性方程组的场的方向与其线性部分的场方向的交角(当 $|z|$ 很小时)很小。所以在 0 的充分小邻域中，交角小于 α_0，而非线性方程组的相曲线横截于球面。▶

推论　复相曲线与半径充分小的球面的截口构成此球面上一个无奇点的 1 维叶层构造。在所有半径充分小的球面上的这些叶层构造是微分同胚的。球面上的叶层构造的微分型在球面的形变下不变，只要球面横截于复相曲线。

所以在奇点附近，所研究的 2 维叶层构造同胚于一个球面上的 1 维叶层构造上的锥。球面上的这个叶层构造即将此球面分裂为向量场的相曲线(因为球面和复叶层构造都是可定向的)。

注　按 Poincaré 定理，在非共振时，方程组在奇点附近(在一适当坐标系下)是线性的。这意味着在非共振时，球面的叶层构造和线性方程组的叶层构造微分型相同。

我们断言，球面上的叶层构造的微分型不仅在坐标原点附近 Poincaré 级数收敛时与线性方程组的叶层构造的微分型相同，而且在远离此极限时也是如此。

事实上，当接近共振时，Poincaré 级数的收敛域压缩到零点，而横截域的半径仍为下有界。所以，我们可以按照在一个固定的(即不依赖于参数的)小半径的球面上叶层构造的变化来研究一个复方程组经过共振的情况。

B. 共振 $\lambda_1 = 2\lambda_2$

作为一个例子，考虑方程组

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + \cdots, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + \cdots,$$

经过共振 $\lambda_1 = 2\lambda_2$ 时，S^3 上叶层构造的拓扑变化。

若比值 $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ 不是负实数，我们停留在 Poincaré 域中。先考虑 S^3 上相应于方程组的线性部分的叶层构造。

分离曲线 $z_1 = 0$，$z_2 = 0$ 沿大圆(它们是方程组在 S^3 上的环线)截球面。其连结系数为 1。

若 λ 非实数(焦点情况)，球面上叶层构造的其余曲线都从一个环线上绕开而绕到另一个环线上。我们来讨论这些环线上的 Poincaré 映射。

注意，可以设这些映射为全纯的。事实上，它们实可微等价于复 Poincaré 映射，映分离曲线的全纯的横截线为其自身。所以在横截于 S^3 上的环线的实二维面上选适当的复构造，它们成为全纯的。由此还有，这些环线的乘子为 $e^{\pm 2\pi i\lambda}$ 和 $e^{\pm 2\pi i\lambda^{-1}}$。

S^3 上相应于所有焦点的叶层构造互相同胚，但不微分同胚：$\lambda^2 + \lambda^{-2}$ 是微分同胚的不变量。

若 λ 是正实数(结点)，问题也在 Poincaré 域中。这时 S^3 在两个连结的环线间的区域被分层，并且成为二维环面而被(对一切环面均相同的)旋转数为 λ 的缠绕所填满。

现在考虑非线性方程组。在焦点时不会有共振。所以，在非线性情况，球面上的叶层构造微分同胚于上述对线性方程组所作的叶层构造，对非共振结点，即对 $\lambda > 0$，但 λ 与 $1/\lambda$ 均非整数，上述也为真。

例如，考虑共振 $\lambda = 2$。这时 Poincaré 标准形是

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + c z_2^2, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2.$$

当 $c \neq 0$ 时，这方程组只有一分离曲线，S^3 上的叶层构造只有一条环线。用一个接近于 2 的非实数代替 λ。在 S^3 上得到的方程组一方面接近于共振；另一方面它又微分同胚于(由以前研究过

的焦点得出的)线性方程组,并有两个环线,其连结系数为 1. 可以证明,这些环线中有一个,C_1,接近于共振时的唯一环线 C. 另一个 C_2 位于以 C_1 为轴的一个细的环面上,当绕 C_1 转两周后,它可以封闭成为子午圈上的一次旋转(所以 C_2 与 C_1 的连结系数为1). 所以在接近于共振 $\lambda = 2$ 时,S^3 上的方程组的形态变化就是从一个固有值为 $(-1,-1)$ 的周期轨道分枝出一个二重周期轨道.

注 以上的叙述是按照作者的文章 Арнольд [5] 而来的. 该文的结果后来由 J. Guckenheimer, N. Kuiper, H. H. Ладис 和 Ю. С. Ильяшенко 等推广. 关于复空间中线性方程组在奇点附近叶层构造的拓扑型的结果是最完全的.

特别地,我们考虑相空间为 3 维,而固有值三角形包含 0(在其内域)的情况. 这时,我们发现,复空间中的叶层构造的拓扑型是由固有值的倒数的三元组所决定的,而这些倒数又可看作实平面上的三个向量. (即可以相差单复变量所得实平面上的实线性变换). 在高维情况下,固有值的倒数组的实型在线性方程组奇点附近一对一地决定了复叶层构造的拓扑型,只要零点含于固有值的凸包中,而且固有值两两之比不是实数(见 C. Camacho, N. Kuiper, J. Palis [1]; H. H. Ладис [1]; Ю. С. Ильяшенко [3]).

C. Poincaré 情况下的遍有形变

考虑具有奇点 0 的解析(光滑)向量场. 设此奇点是 Poincaré 型的,即固有值组的凸包不包含点 0.

定理 解析(或全纯,光滑)向量场在 Poincaré 型奇点的芽具有有限参数的解析(全纯,光滑)遍有形变,并全由多项式向量场组成.

换言之:

具有 Poincaré 型奇点 O 的解析(全纯、光滑)局部族均在点 O 附近解析(全纯,光滑)等价于这些场在 O 点的 Taylor 级数充分长的节所组成的族.

◀根据条件,奇点是非蜕化的,从而光滑依赖于参数. 所以可

用光滑的，并光滑依赖于参数的变量变换将奇点变到坐标原点．设固有值是单的．这时可选固有基底光滑依赖于参数．在所得坐标系中，相应于向量场族的微分方程组族成为

$$\dot{x}_k = \lambda_k(\varepsilon)x_k + \cdots,\ k = 1, \cdots, n.$$

应用 Poincaré 方法（第五章）只能除去那些在 $\varepsilon = 0$ 时为非共振的项．这时变换光滑依赖于参数．因为固有值属于 Poincaré 域，共振为数有限，而整个过程的收敛性不难证明．▶

右方为有限（或无限）可微的情况也不难研究． 详见 Н. Н. Бруншинская [2]，其中也考虑了重固有值的情况．

D. 共振的具体表现

在 Siegel 域中，考虑化为标准形的问题时，会产生小分母困难．这时，拓扑图象却可能是简单的．例如通常的鞍点，不论固有值之比是有理的还是无理的，其拓扑构造是一样的．这种现象在 Poincaré 域中也是有的：共振可能不影响相图的拓扑．

自然产生一个问题，为什么共振效应在拓扑上没有显现，却干扰了解析（甚至有限光滑）化约标准形式？为了理解这个问题，在拟周期运动的摄动理论中，考虑共振的性态是有用的．

考虑 n 维环面 T^n 上的微分方程

$$\dot{\theta} = \omega + \varepsilon,\ \theta \bmod 2\pi \in T^n,\ \omega \in \mathbf{R}^n,\ \varepsilon \ll 1. \qquad (*)$$

共振 $(\omega, k) = 0$ 对应于方程组拓扑性质的改变（至少在无摄动，即 $\varepsilon = 0$，时如此）：相曲线不象非共振时那样处处稠密地填满 n 维环面，而只填满 $n-1$ 维环面．例如在 $n = 2$ 的共振时，通常产生粗的周期状态（环面上有稳定与非稳定的极限环）．很显然，这些环线的存在妨碍了将方程化为非共振时通常的标准形式 $\dot{\theta} = \omega$．

Poincaré 关于三体问题初积分不存在的证明，也是以类似想法为基础的．

可以假设在上面处理的局部问题中，共振对发散性的效果性质类似，而与相曲线在复域（而非实域）中形成的叶层构造的拓扑变化有关．这个变化，既使它在相空间的实部全体上没有表现出

来，它一定会阻碍解析(甚至 C^r 光滑的)化为标准形。

注意，方程组 $\dot{x}_k = \lambda_k x_k + \cdots$，可以通过变换 $x = e^{i\theta}$ 化为(*)(实的 ω 对应于纯虚的 λ)。通常求方程组(*)的极限环的方法归结为考虑未摄动方程的初积分 $\rho = e^{i(\theta,k)}$；用原方程组的记号有 $\rho = x_k$。相应于共振的不变流形的一次近似方程，可由关系式

$$\dot{\rho} = \rho[(k, \lambda) + (k, c)\rho + \cdots]$$

得出。我们形式地得出

$$\rho \approx -\frac{(k, \lambda(\varepsilon))}{(k, c(\varepsilon))}.$$

然而，我们的级数通常发散，而推导需要论证。

$n = 2$ 时，以上的讨论可用复极限环存在的严格证明来证实，此极限环在共振附近有上述的渐近性态。(见 A. C. Пяртли [2]，详证见 A. C. Пяртли [3])。

在共振时，$(k, \lambda) = 0$，环线(复的非单连通相曲线)接近奇点的复分离曲线。这个环线上的不可收缩的路径(在共振时)消失而与平衡位置重合。平衡位置在失稳时生成(或消除)一个环线(见§33)，这是一特例。这时 $k = (1, 1, 0, \cdots)$，$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$，而整个现象都能在实域中观察到(见图 127)。其它情况下(甚至在同样的共振下；例如鞍点情况)，在共振时，实相曲线的拓扑并不改变。

方程(或一族方程)的复相曲线的拓扑的区别及其标准形式的拓扑的区别，是解析地化为标准形式的障碍。此外，如果这个区别如通常那样是由有限阶节决定的，则它不仅阻碍了解析地化为标准形式而且也阻碍了有限光滑地化为标准形式。例如，在固有值的比可以很好地用有理数逼近时，化约级数的发散可以解释如下：即恒定点的任意邻域中都存在着由邻近的高阶共振生成的极限环；标准形式的方程组没有这种极限环，所以化为标准形的变换一定是发散的。

我们对 Poincaré 级数发散性的研究还很不完全。Пяртли 的工作以前的发散性证明 (Poincare, Siegel, Брюно) 都基于系数

增长性的计算而没有说明发散的原因。正如计算 arctan z 的级数系数，只证明它在 $|z|>1$ 处发散，而未说明其原因：在 $z=\pm i$ 处有奇点。

А. С. Пяртли 证明了以下的结果：

1. 在通有情况下，在 C^2 中穿过共振 $k_1\lambda_1+k_2\lambda_2=0$ 时，由奇点的分离曲线将分枝出一个不变流形，其一次近似方程形如 $z_1^{k_1}z_2^{k_2}=\varepsilon$，$\varepsilon$ 表示对共振的偏离，z_1, z_2 是相坐标。

2. 在 C^n 中（在对余下的固有值的严格限制条件下），同样的共振也有类似结果。

3. 对于"非正常可通约"的 λ_1 和 λ_2，通有地有无穷多个不变流形存在，对应于在奇点的任意邻域中的各个共振，这蕴含了 Poincaré 级数发散。

Пяртли 的工作是以 E. Hopf 的方法为基础的。 А. Д. Брюно 对他的前两个结果给出了不同证法和推广（见 А. Д. Брюно [2]，[3]，[4]）。

E 三个固有值的共振

稍微复杂一点的共振如下：

$$k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_3=0,$$

这里以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为顶点的三角形包含 0。 这也由 Пяртли 和 Брюно 研究过。这里也证明了，当 $n=3$ 时，由奇点的分离曲线分枝出不变流形。令 (z_1, z_2, z_3) 为相坐标，ε 是形变参数（$\varepsilon=0$ 对应于共振）。这时不变流形在 (z, ε) 空间中填满一个全纯超曲面，在适当坐标系下，方程的一次近似是 $z_1^{k_1}z_2^{k_2}z_3^{k_3}=\varepsilon$。

Пяртли 证明了，对于"非正常可通约的"构成 Siegel 三角形的 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$，通有地，在平衡位置 $0\in C^3$ 的任一邻域中都有无穷多以上形状的不变流形，对应于不同的共振。

以后会看到，在非共振点 $0\in C^3$ 的邻域中出现足够大的一片共振不变流形阻碍了 Poincaré-Siegel 级数在此邻域中的收敛。故由上述 Пяртли 的结果可知，对"非正常可通约"的 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$，

通有的情况是，上述级数在坐标原点的任意邻域中发散。

F. 离散时间情况

考虑不动点 0 附近的微分自同胚 $A:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$. 记 A 在 0 的线性部分的固有值为 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$.

前面的理论可以搬过来，但要作以下改变：

共振：$\lambda_k=\lambda_1^{m_1}\cdots\lambda_n^{m_n}$ $(m_i\geqslant 0,\ \sum m_i\geqslant 2)$.

Poincaré 域：所有 $|\lambda_s|>1$ 或所有 $|\lambda_s|<1$.

Siegel 域：既有 $|\lambda_i|\geqslant 1$，又有 $|\lambda_j|\leqslant 1$.

注 对 $\mathbf{C}^n$ 中每个线性向量场，均有 $\mathbf{C}^{n-1}$ 中的一个线性变换（"Poincaré 映射"）。具体地说，设此场由微分方程组

$$\dot{z}_1=\alpha_1 z_1,\ \cdots,\ \dot{z}_n=\alpha_n z_n,$$

定义，其中 $\alpha_n\neq 0$. 考虑当 $t=0$ 时在平面 $z_n=1$ 上取初始值的解。解在 $t=2\pi i/\alpha_n$ 时的值仍在该平面 $\mathbf{C}^{n-1}$ 上。这样得到的映射 $A:\mathbf{C}^{n-1}\to\mathbf{C}^{n-1}$ 具有固有值 $\lambda_s=e^{2\pi i\alpha_s/\alpha_n}$, $(s=1,\cdots,n-1)$.

在非线性情况下（在一些弱的附加假设下），构造 Poincaré 映射的类似方法也存在。因此，关于映射的不变流形和分枝的结果可以导出关于向量场的相应结果。

然而，在大多数情况下，应用方程和映射间上述的联系作为启发更好，这样可从一个领域的已知结果猜测到另一个领域的结果。在两种情况下独立地证明定理则比较方便。

G. 微分同胚的不变流形的分枝

向量场的三个固有值间的共振

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0,$$

对应于离散情况下的如下的共振

$$\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}=1,$$

而在 Siegel 域中：$m_1>0$, $m_2>0$, $|\lambda_1|\neq 1\neq|\lambda_2|$. 我们设 λ_1 的模大于 1, λ_2 的模小于 1.

这时，Пяртли 和 Брюно 的结果意味着存在不变流形，它在

空间 (ε, z_1, z_2) 中填满一个曲面，其方程从形如 $\varepsilon = z_1^{m_1} z_2^{m_2}$ 的项开始，ε 是对共振的偏差，(z_1, z_2) 是适当的（光滑依赖于 ε 的）相坐标。对于固定的 $\varepsilon \neq 0$，所作出的不变流形同胚于柱面。柱面的基圆与 $\mathbf{C}^2$ 中坐标轴的连结系数是 m_1, m_2。

我们将证明，若一微分同胚的非共振不动点的邻域中有一块相当大的这种共振不变流形存在，将妨碍在此邻域中微分同胚的线性化。所以，若在不动点的任一邻域中都有共振流形，线性化级数将处处发散。

$\mathbf{C}^2$ 中所有适合 $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$ 的映射，彼此拓扑等价。特别地，它们都可以线性化而且有许多不变柱面。然而我们将会看到，解析不变柱面是很罕见的。

H. 局部平移

我们想对一个 $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ 映射的共振不变流形附加一条（嵌入在一全纯曲面中的）椭圆曲线。此曲面即此映射的轨道流形（$\mathbf{C}^3$ 中的原微分方程的相曲线流形）。为了定义此轨道流形，我们引入以下的术语。

考虑柱面 $S^1 \times \mathbf{R}$。柱面上的标准平移定义为第二个坐标加 1。令 D_0 为柱面上包含 $S^1 \times [0, 1]$ 的区域。标准平移限制在 D_0 上定义了一个微分同胚 $t: D_0 \to D_1 = t(D_0)$。注意到，交集 $D_0 \cap D_1$ 包含了圆周 $S^1 \times 1$。用 D 记 $D_0 \cup D_1$。

令 M 为一二维流形，M_0，M_1 为其上的区域，$f: M_0 \to M_1$ 为一个同胚。

定义 若存在一同胚 $h: M \to D$ 变 M_0 为 D_0，M_1 为 D_1，且 f 为 t，则 f 称为局部平移。

令 M 为一复曲线，$f: M_0 \to M_1$ 为一全纯局部平移，将每一点 $z \in M_0$ 与其像 $f(z) \in M_1$ 等同起来就决定了一个同胚于环面的紧复曲线，即椭圆曲线 $T = M/f$。

◀证明是明显的。▶

现在考虑柱面与平面的直积 $\Pi = (S^1 \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$。令 $T: \Pi \to \Pi$

为沿 R 平移 1，E_0 为 $D_0\times 0$ 的邻域，$E_1=TE_0$，$E=E_0\cup E_1$。

令 N 为一光滑 4 维流形，$M\subset N$ 为其 2 维子流形，N_0，N_1 为 $N=N_0\cup N_2$ 的区域，而 $F:N_0\to N_1$ 为一个同胚。

定义 若存在同胚 $H:N\to E$，变 N_0 为 E_0，N_1 为 E_1，F 为 T 而 M 为 D，则 F 称为 N 沿 M 的局部平移。

令 N 为复曲面，$M\subset N$ 为复曲线，$F:N_0\to N_1$ 为沿 M 的全纯局部平移。将每点 $z\in N_0$ 与其像 $F(z)\in N_1$ 等同起来，这样可以决定个一全纯复曲面 $\Sigma=N/F$，它为椭圆曲线 $\Gamma=M/f$ 的邻域。

◀证明是明显的。▶

I. 由线性变换的共振不变流形作出椭圆曲线

令 $A:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ 为一个线性变换，其固有值为 λ_1，λ_2，$|\lambda_1|>1>|\lambda_2|$。设固有值满足共振关系 $\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}=1$，$m_1$，$m_2$ 互质。这时柱面 $z_1^{m_1}z_2^{m_2}=1$（z_1，z_2 是固有基底坐标）对 A 不变。

将 A 限制到此柱面上，可得一个全纯平移。事实上，用参数 $\Lambda\neq 0$ 根据公式 $\lambda_1=\Lambda^{m_2}$，$\lambda_2=\Lambda^{-m_1}$，可将曲线 $\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}=1$ 单值化；在柱面上引入参数 $Z\neq 0$，如 $F:z_1=Z^{m_2},z_2=Z^{-m_1}$。于是 A 在柱面上的作用为 $Z\longmapsto\Lambda Z$。因 $|\Lambda|>1$，故此变换是全纯平移。相应的椭圆曲线为 $\mathbf{C}^*/\{\Lambda\}\cong\mathbf{C}/(2\pi\mathbf{Z}+\omega\mathbf{Z})$，其中 $\Lambda=e^{i\omega}$。

我们注意，在共振时，线性变换有一个整个单参数全纯不变的柱面族 $z_1^{m_1}z_2^{m_2}=c$，$c\neq 0$。由这些柱面作出的椭圆曲线均为同构。

这种柱面(或其充分大的部分)的适当邻域，对 A 的作用作因子分解后，变为复曲面上椭圆曲线的邻域。这个曲面是椭圆曲线与 $\mathbf{C}$ 的直积。事实上，位似变换 $z\longmapsto kz$ 定义了到椭圆曲线上的投影，而映射 $z\longmapsto z_1^{m_1}z_2^{m_2}$ 是到第二个因子上的投影。

特别地，椭圆曲线在所作曲面上的自交指标为 0。

J. 由非线性变换的共振不变流形作出椭圆曲线

令 $A(\varepsilon):U\to\mathbf{C}^2$ 是区域 $U\subset\mathbf{C}^2$ 到 $\mathbf{C}^2$ 的双全纯映射，并且它全纯依赖于参数 ε。令 ε 在 $\mathbf{C}$ 中零的邻域内变化，而一切映射 $A(\varepsilon)$ 均以原点为不动点。

以 λ_1，λ_2 表示映射 $A(0)$ 在 0 处的线性化的固有值。设 $|\lambda_1|>1>|\lambda_2|$，$\lambda_1^{m_1}=\lambda_2^{-m_2}$，而 m_1，m_2 为互质。

对于通有的族 A，在穿过 $\varepsilon=0$ 的共振时，将有一不变的全纯共振柱面由不动点的分离曲线分枝出来（见 §36 G）。固定充分小的 ε 并考虑 $A(\varepsilon)$ 在此柱面上的限制。可以证明 $A(\varepsilon)$ 在柱面的一部分上诱导出一局部全纯平移。［这可由以下事实得出：(1) 柱面方程的一次近似是 $z_1^{m_1}z_2^{m_2}=c(\varepsilon)$；(2) $A(\varepsilon)$ 在 0 接近于 $A(0)$ 的线性化；(3) $A(0)$ 在 0 处的线性化作为局部平移作用在柱面 $z_1^{m_1}z_2^{m_2}=c$ 上。（见 §36 I）］。

于是，对充分小的 $|\varepsilon|$，映射 $A(\varepsilon)$ 决定了一条嵌在曲面 $\Sigma(\varepsilon)$ 中的椭圆曲线 $\Gamma(\varepsilon)$。在 $\Gamma(\varepsilon)$ 的各同调类中有一特殊的圆（即柱面基圆的像）。曲线 $\Gamma(\varepsilon)$ 可以表为

$$\Gamma(\varepsilon)\approx\frac{\mathbf{C}}{2\pi Z+\omega(\varepsilon)\mathbf{Z}},$$

2π 相应于该特殊的圆。函数 $\omega(\varepsilon)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时有极限 ω_0。由§36 I 中的公式有 $\lambda_1=e^{i\omega_0 m_2}$，$\lambda_2=e^{-i\omega_0 m_1}$。

曲线 Γ 与曲面 Σ 的自交指标为 0。所以 Σ 拓扑等价于 Γ 与一个圆盘的直积。然而 Σ 不一定是解析直积。此外：

(1) Σ 可能不是 Γ 上的全纯纤维化；Γ 在 Σ 中的邻域可能并不能全纯映到 Γ 上且在 Γ 上为恒等映射。例如，若在 Γ 附近，Σ 上有一族各具不同的 ω 的模的椭圆曲线，情况就是这样。

(2) Γ 在 Σ 中可能除了沿其本身的平移之外再没有其它形变。例如，如果 Γ 在 Σ 中的法丛是解析非平凡的，情况就是这样。

§27给出了关于 Σ 构造的正面结果。

K. 映射在包含共振柱面的区域中的不可线性化

定理 若椭圆曲线Γ在其邻域Σ中不可形变，则在0的任一邻域中(若含有构造曲线Γ所需的足够大的一块全纯不变柱面)，A不能用双全纯变量变换线性化．

◀事实上线性映射的全纯不变柱面恒可用小的位似变换来变形．▶

所以，我们可以用在一条椭圆曲线上具有非平凡法丛的全纯不变柱面，得到 Poincaré-Siegel 级数的收敛半径的上估计．

定理（Ю. С. Ильяшенко）．若一线性映射具有全纯不变柱面，其基圆与固有轴的连结系数为(m_1, m_2)，而相应椭圆曲线为$\mathbf{C}/(2\pi\mathbf{Z}+\omega\mathbf{Z})$（$2\pi$ 对应于基圆），则固有值为 $\lambda_1 = e^{i\omega m_2}$，$\lambda_2 = e^{-i\omega m_1}$．于是有共振 $z_1^{m_1} z_2^{m_2} = 1$．

◀令(z_1, z_2)为固有坐标．微分形式 $\dfrac{dz_k}{z_k}$ 在柱面上全纯且对映射不变，并在椭圆曲线上定义了全纯形式．

现计算这些形式在环面同调群的生成元上的积分．一个生成元对应于柱面的基圆．对此有

$$\oint \frac{dz_1}{z_1} = 2\pi i m_2, \quad \oint \frac{dz_2}{z_2} = -2\pi i m_1,$$

因为γ与轴$z_1 = 0$和$z_2 = 0$的连结系数分别为m_2与m_1．第二个生成元对应于联结z点及其在柱面上的像的线段δ．对此有$\int \dfrac{dz_1}{z_1} = \ln\lambda_1$，$\int \dfrac{dz_2}{z_2} = \ln\lambda_2$（这些关系式决定了对数函数的枝）．另一方面，椭圆曲线上的所有全纯形式除相差常数因子外为恒同所以

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\ln\lambda_1}{2\pi i m_2} = -\frac{\ln\lambda_2}{2\pi i m_1}. \blacktriangleright$$

推论 令A为具有不动点0和固有值$\lambda_{1,2}$的局部微分同胚．设在不动点的邻域U中，有一个全纯柱面存在．A为沿此柱面的全纯平移，ω为相应椭圆曲线的周期．若λ，ω间没有关系：

$\lambda_1 = e^{i\omega m_2}$, $\lambda_2 = e^{-i\omega m_1}$ (m_1, m_2 是与奇点的分离曲线的连结系数),则微分同胚A在U中不解析等价于一个线性微分同胚.

L. Poincaré 级数的发散性

迄今所得的结果意味着以下的

定理 若在一个局部微分同胚 $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ 非共振不动点 0 的任意小邻域中均有全纯柱面，而此微分同胚作用在其上为局部平移,则在不动点 0 的任一邻域中,这个微分同胚不能解析等价于一个线性微分同胚(从而 Poincaré 级数发散).

Прятли 证明了不变柱面这样聚集于奇点，对那些固有值"可用共振固有值逼近得非正常好"的映射，是通有的现象. 所以,对这些固有值，Poincaré 级数(处处)发散——也是通有的现象.

本节结果很容易推广到 $\mathbf{C}^3$ 中向量场接近于 Siegel 型奇点处. 共振$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 = 0$ 的具体表现是一条椭圆曲线.这条曲线上的点就是向量场在不变共振曲面 $z_1^{m_1}z_2^{m_2}z_3^{m_3} = c\varepsilon + \cdots$上的相曲线.

M. 复曲面上的椭圆曲线的分枝

上述微分方程不变流形的分枝理论和复曲面上自交指标为 0 的椭圆曲线的分枝理论是很相近的.

椭圆曲线及其在曲面上的法丛可由一对复数 (ω, λ) 给出(§27). 我们可以通过对复 φ 轴和两复变量 (r, φ) 平面作以下粘合,而得到它们:

$$(r, \varphi) \sim (r, \varphi + 2\pi) \sim (\lambda r, \varphi + \omega).$$

一个丛称为**共振的**，如果它在某个有限叶覆盖上是解析平凡的.

在 (λ, ω) 空间中，共振丛对应于超曲面 $\lambda^n = e^{ik\omega}$. 结果是，如果将 (λ, ω) (椭圆曲线,曲面)连续改变,则在通过共振时，椭圆曲线将被另一条椭圆曲线逼近,后者拓扑覆盖前者. 因此,共振的具体表现化就是一个重椭圆曲线的分枝.

考虑单参数族 $\Gamma(\varepsilon)\subset\Sigma(\varepsilon)$。设对应于 $\varepsilon=0$，有共振 $\lambda^n=e^{ik\omega}$。可以证明分枝曲线形如 $r^n e^{ik\varphi}=\varepsilon$（选定族中适当的参数 ε，并作坐标 (r,φ) 的（依赖于 ε 的）适当的变换，可假设对应于 $\varepsilon=0$ 有共振，且没有更低阶的共振：$\lambda^m e^{il\varphi}\neq 1$，这里 $0<m<n$)。

现用形式级数来推导分枝曲线的方程。用 § 27 那样的讨论，可以把粘合化为以下形状：

$$\begin{cases} r \\ \varphi \end{cases} \longmapsto \begin{cases} r\lambda(1+\alpha\varepsilon+a\omega+A), \\ \varphi+\omega+\beta\varepsilon+bw+B, \end{cases}$$

其中 α,β,a,b 都是常数，$w=r^n e^{ik\varphi}$，A，B 是 ε 和 w 的幂级数（从 2 次项开始）。这样的变换把 w 变为 $w(1+\gamma\varepsilon+cw+C)$，这里 $\gamma=n\alpha+ik\beta$，$c=na+ikb$，C 可以写为 ε 和 w 的 2 次及高次项。

方程 $\gamma\varepsilon+cw+C=0$ 定义了分枝曲线。对于通有族，有 $\gamma\neq 0$，$c\neq 0$。作 ε 和 r 的适当的坐标变换后，此方程成为 $r^n e^{ik\varphi}=\varepsilon$。

收敛性的研究可以和上述 Пяртли 和 Брюно 的工作同样进行。

注　不难证明，条件 $\lambda^n e^{ik\varphi}=1$ 恰好表明法丛在椭圆曲线的某个有限叶循环覆盖上解析平凡。

拓扑地说，所有考虑过的丛都是平凡的。特别地在共振时分枝的椭圆曲线可“沿 r 方向”非全纯地投影到曲线 $\Gamma(\varepsilon)$ 上。这个投影是环面的拓扑有限叶循环覆盖。正是在此覆盖上法丛在通过共振时成为平凡的。

设 $(n,k)=d>1$（但对 $0<m<n$，没有更低阶的共振：$\lambda^m e^{il\omega}\neq 1$）。这时分枝曲线是非连通的，它有 d 个连通分支，而每个分支都是原环面的一个 (n/d)-叶拓扑覆盖。

N. 线性化的发散性

对某些非共振丛（即 (λ,ω) 对）把粘结化为标准形式的级数是发散的。

曲线在共振时的分枝使我们能"解释"将粘结线性化的级数的发散性. 设 (λ, ω) 非共振，但很近于共振. 这时在初始的椭圆曲线的小邻域中，通有地将有另一条椭圆曲线存在，即具体体现共振的曲线. 若数对 (λ, ω) 充分接近于无穷多个共振，则在初始的椭圆曲线的任意小邻域中都都有无穷多条曲线存在，具体体现不同的共振并循环覆盖原曲线.

初始曲线的法丛是非共振的. 0 次非共振法丛，在椭圆曲线的任意有限叶循环覆盖上，都没有截口. 所以在初始椭圆曲线的法丛中没有循环覆盖原曲线的椭圆曲线. 这意味着曲面上的初始曲线没有一个能双全纯地映到法丛的零次截口的邻域上. 所以，若数对 (λ, ω) 能用共振对逼近得太好，则对通有的粘合，级数总是发散的. 以上论述依据作者的文章 [19]. 详证可见 Ю. С. Ильяшенко 和 А. С. Пяртли 的系列文章 [1].

注 解析流形的紧复子流形与微分方程的极限环之间有着相似性：恰只当单值化算子有固有值 1 时，场的小形变，才使极限环消失，曲面上自交指标为 0 的椭圆曲线，当法丛为解析非平凡时在曲面的小形变下是不会消失的. Ф. А. Богомолов 提出了下面的说法： 复流形的紧复子流形(若法层的 1 维上同调为平凡的)，在整个流形的小形变下不会消失（关于上同调的定义见 R. O. Wells [1]).

§ 37. 奇点的分岔

我们在本节中放弃"万有"的观点，不考虑微分方程组的族，而在向量场的奇点附近考虑个别的微分方程，而且允许有任意高阶余维数的蜕化. 研究这样复杂的奇异性从一般观点看来价值有限，因为复杂的蜕化余维数很大，并且极少出现.

然而既使在现有方法还不能处理的复杂情况下，任意奇异性的一般的基本特征也是有意义的.

特别地，知道在高余维数情况下会发生什么样的病态，从而至

少不必白花精力探求不存在的东西，这也是有用的。可以证明，例如 Ляпунов 渐近稳定性以及中心点-焦点问题的代数判据（当特征方程有零根时），就是这种不存在的东西。

为了理解需要讨论的基本问题是什么，我们从最简单的可以完全地加以分析的问题开始。

A. 实直线上函数的奇异点

令 f 是在 $x=0\in\mathbf{R}$ 附近光滑的实值函数。若点 0 不是临界点，函数在 0 附近光滑等价于一个线性函数（$f(x)=x+c$）。

临界情况会发生什么事也是清楚的：若 $f'(0)=0$，则函数的性态由 $f''(0)$ 的符号决定，等等。

为确定起见，考虑函数在 0 有极小的条件。答案可以这样给出：函数在 0 的 k 阶节空间 J^k 可以分为三部分。

$$J^k=\mathrm{I}\cup\mathrm{II}\cup\mathrm{III};$$

I 即是保证有极小的节，

II 即是保证没有极小的节，

III 即是不能确定有无极小的节。

I, II 型的节称为**充分的**，III 型的节称为**可疑的**。

在我们的问题中，集合 I, II, III 有以下两个性质。

1. **半代数性**。I, II, III 中每一个集都是节空间 J^k 的半代数子流形。

$\mathbb{R}^N$ 的**半代数集**是有限个子集的并，而每个子集由有限个多项式方程与不等式定义。

若不用不等式就可定义该集合，则我们称它为代数集。下面的定理是半代数集的有用的性质（参见 A. Seidenberg [1] 和 E. A. Горин [1]）。

Tarski-Seidenberg 原理　半代数集合在多项式映射下的像仍为半代数集合。

下面是一个较弱的（然而等价的）陈述：

半代数集在子空间上的投影仍为半代数集。

注意，代数集的投影可能不是代数集而只是半代数集(例如球面在一个平面上的投影)。

2 几乎有限决定性．当 $k\to\infty$ 时，可疑节的集合III($\subset J^k$)的余维数趋向无穷．

换言之，决定 J^k 中的可疑节的条件的个数随 k 增加．结果可以证明，(不论用 Taylor 级数多少项也不能判定 0 是否局部极小的)函数集合非常薄：它在函数空间中的余维数为无穷．

B. 其它例子

多元函数的类似问题就没有这样简单的算法：若二阶微分蜕化，则必须求助于高阶导数，从而遇到代数曲线，曲面等等的分类问题．然而既使在种情况下，$\mathbf{R}^n$ 上函数的 k 阶节空间的分解 $J^k=$ I∪II∪III 也是半代数的且几乎有限决定的． 想对任意大的 n 和 k 显式地写出 Taylor 系数的方程和不等式虽然是没有希望的，这些方程和不等式的存在则可由 Tarski-Seidenberg 定理得出，而这个定理的证明也就包含了求这些方程和不等式的算法(推广的 Sturm 理论)．

分类的最初一段可以显示地算出，而且说来也怪，它与正多面体的分类，A_k、D_k、E_k 等各列的 Coxeter 群，Weyl 群，Lie 群，自守函数，Лобачевский 平面的三角形，聚焦面的奇点，波前集以及振荡积分和稳定位相法都有关系(见 В. И. Арнольд 的总结文章[10]及其中的文献：В. А. Васильев [1])

下一个例子是光滑映射芽的拓扑分类问题． R. Thom 在 1964 年提出一个关于这个情况的半代数性和几乎有限决定性的定理；证明是由 А. Н.Варченко [1] 给出的．

C. 向量场的奇点

我们回到向量场奇点的拓扑分类问题．初看起来，这问题和函数情况一样简单．非蜕化奇点可按位于左半平面的固有值个数分类．对应于左半平面中根的个数，可将 1 阶节空间分解为有限

多个部分. 每部分都是节空间的半代数集；定义它的多项式不等式甚至可以明显写出（Routh-Hurwitz 条件，例如参见 Ф. Р. Гантмахер [1]）.

可疑的 1 阶节构成了一个余维数 1 的半代数子流形，它们把对应于左半平面中固有值不同数目的区域分隔开. 我们在前节中考虑了一系列例子，研究在过渡到 2 阶节时这些蜕化情况会发生的变化. 于是，这也造成一种印象，即我们走多远都行，只是由于计算的复杂和情况众多才使得我们不能给出任意高余维数时的代数分类. 然而后来发现事实并非如此（见 В. И. Арнольд [6]）.

甚至在这样一个简单问题，如在特征方程有零根时，区分中心点与焦点，半代数性都已丧失（这是 А. Д. Брюно 与 Ю. С. Ильяшенко 的工作，见 Ю. С. Ильяшенко [1]）. 所以不可能有稳定性与拓扑分类问题的代数算法[1].

然而，多少还有希望存在非代数算法，即几乎有限决定性质成立：不能由 Taylor 级数的任意有限部分和决定其拓扑型（或稳定性）的芽的集合可以具有无穷余维数. 情况是否如此，这个问题有严重困难；它的提法需要弄明确，即指明余维数一词的确切含意. k 阶节空间的余维数有待决定的集合不是代数集，而可能产生集论的困难. R. Thom 猜测，这个问题的答案是否定的. 见 F. Takens [1].

我们还要提出一个问题，即对一个（分量为整数环上的多项式的）向量场，恒定点稳定性的算法可否判定的问题.

D. 可疑集的构造

几乎有限决定性问题关联着 k 阶节空间 J^k 中可疑节集合（当 $k\to\infty$ 时）的性态问题. 对于固定的 k，我们研究可疑集合的构造比较容易. 固定向量场在 0 的一个可疑 $(k-1)$ 节，并且考虑（具

1) 最近，Л. Хазин 与 Э. Шноль 在有两对共振 3:1 的纯虚固有值的情况下，证明了稳定性问题. 这个情况相应于函数空间中余维数 3 的子流形. 见 Л. Хазин, Э. Шноль [1], [2]；以及 П. М. ДЕлисаров [1].

有以上给出的（k-1）阶节的)这个k阶节空间 J. 为确定起见，考虑渐近稳定性问题. 这时空间J可以分成三块（可能有空的）：I（对k阶节是稳定的），II（对于k阶节是不稳定的）以及其余的可疑节集合 III（在拓扑分类问题中还有更多的部分）. 稳定性判据问题的一个合理提法是确定集合I，II以及两者间边界的性质. 例如，边界的超越性表示不存在稳定性的代数判据. 现在提问：这个边界的构造会有多复杂？例如，它(或者区域I，II的开部分)会不会有无穷多连通分枝？又如：I，II中的点会不会彼此交织如同无理数和有理数？

我们还不知道这一类的例子. 但是可以设想它们会发生在多维空间的充分大余维数——这种特例中.

相曲线在 $\mathbf{R}^n$ 的奇点附近的性态局部问题和以下的整体问题密切相关，即在比它小1维的射影空间 $\mathbf{R}P^{n-1}$ 中，由多项式系统给出的微分方程问题. 在上述关于代数不可解性的工作中，(从射影平面上多项式系统的系数空间中)极限环生成的曲面的超越性质，导出了局部问题中节空间稳定性边界的超越性质. 但是在高维的整体情况下，比极限环复杂得多的现象也是可能的. 例如环面上旋转数为可通约与不可通约相交织的方程组，又如函数空间中没有结构稳定系统的区域. 所有这些现象在射影空间中的多项式系统中都会发生，而每一个这种现象都使空间J中稳定性区域的边界更加复杂.

考 试 例 题

在四小时笔试中，总共有 15 个相关的问题．方括弧中是每题分数，均已预先告诉学生．

第一组

$$\ddot{x} = -\sin x + \varepsilon\cos t. \tag{1}$$

I. 令 $\varepsilon = 0$.

(1) 在点 $x = \pi$, $\dot{x} = 0$ 线性化 [1].

(2) 这个平衡位置是否稳定 [1]?

(3) 求相流映射在点 $x = \pi$, $\dot{x} = 0$ 与时刻 $t = 2\pi$ 的 Jacobi 行列式 [3].

(4) 求具有初始条件 $x = \pi$, $\dot{x} = 0$ 的解，对于 ε 在 $\varepsilon = 0$ 处的导数 [5].

(5) 在初始条件 $x = 0$, $\dot{x} = 2$ 下，作解及其导数对 t 的导数.

II. 令 (2) 为沿着 (5) 的解的线性化方程.

(7) 方程 (2) 是否有无界的解 [8]?

(8) 方程 (2) 是否有非 0 的有界解 [8]?

(9) 求(2)的基本解组的 Wronski 行列式，但已知 $W(0)=1$ [5].

(10) 显式写出 (2) 并求解 [10].

(11) 求沿着初始条件为 $x = \pi/2$, $\dot{x} = 0$ 的解的线性化方程单值化算子的固有值与固有向量 [16].

(12) 证明方程 (1) 有光滑依赖于 ε 并在 $\varepsilon=0$, $t = \pi$ 处为 0 的 2π 周期解 [6].

(13) 求此解当 $\varepsilon = 0$ 时对 ε 的导数 [6].

III. 考虑方程 $u_t + uu_x = -\sin x$.

(14) 写出特征方程 [2].

(15) 求出最大的 t 使 $u|_{t=0}=0$ 的 Cauchy 问题的解可以拓展到 $[0,t)$ 上 [8].

第二题

I. 设一个三维向量场以原点为奇点，而且在此奇点处有一个固有值为0,另两个为纯虚.

(1) 将此场的分量在 0 处的 Taylor 展开式的一次项化为标准形式 [1].

(2) 对 2 次项也这样做 [3].

(3) 对任意次项这样做 [8].

(4) 沿着由场的线性部分给出的快旋转把此项平均化[12].

II. 假设存在依赖于一个参数的，并且当此参数取零时包含 I 中场的一族场.

(5) 用一个光滑依赖于此参数的微分同胚(参数在 0 附近变化),将此族场在 0 处的 Taylor 级数的起始段化为尽可能简单的形状 [10].

(6) 将方程组对初始场的线性部分所给出的快旋转平均化 [20].

III. 在三维向量场的 1 阶节空间中,考虑在奇点具有一个零固有值和两个纯虚固有值的节流形.

(7) 求此流形的余维数 [2].

(8) 写出已化为(5)中形式的族横截于此流形的条件 [8].

(9) 分析通有的(横截于此族的)两参数族的奇点[10].

(10) 分析由这些奇点分枝出来的环线 [15].

(11) 研究连结这些奇点的相曲线的存在与光滑性 [15].

IV. 指定平面上一条过原点的直线. 若平面上一个微分同胚将此直线变为其自身,则称它为*特定的*. 若一个向量场在各点均切于这条特定曲线，则它也称为特定的. 设有一个特定向量场在 0 处有奇点且有两个 0 固有值.

(12) 用特定微分同胚将此场在 0 处的 Taylor 级数的一段

化为尽可能简单的形状 [12].

(13) 设一族特定向量场是所给场的形变，用形式光滑依赖于参数(在 0 附近变化)的形式特定微分同胚，把此族化为形式标准形式 [16].

(14) 在问题 (13) 的标准形式中略去高阶项,分析由此所得的通有族的奇点的分枝 [18].

(15) 用 (12)—(14) 题中的结果研究具有一个 0 固有值和两个纯虚固有值的场的相图的分枝 [25].

附加题

(1) 令 $\dot z = \varepsilon z + Az|z|^2 + \bar z^2$. 证明 $\mathrm{Re}A > 1$ 时,极限环个数 $\leqslant 1$. 提示: 用 $z\bar z$ 除此场并应用公式

$$\mathrm{div}P(z, \bar z) = 2\mathrm{Re}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right).$$

(2) 令 $A=(3+i)/\sqrt{2}$，则对 $\arg\varepsilon = 5\pi/4$，每个鞍点-结点的非奇异分离曲线均与下一个鞍点-结点的非奇异分离曲线重合. 提示: 在鞍点-结点重合时,方程可化为

$$\dot w = e^{i\theta}[Rw(|w|^2 - 1) + i(\bar w^2 - w^2)],\ A = (R - i)e^{i\theta}.$$

若 $R = 2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, 分离曲线成为直线.

(3) 将复 A 平面分为三个区域,使对应于(当 ε 变化时)奇点在环线上,在环线内,在环线外三种情况. 分析分离这些区域的曲线. 提示: 当 θ 变化时，场中的向量旋转. 这些曲线的位置近似于四条抛物线: $a^2 = 2(\pm b \pm 1)$, $A = a + ib$.

(4) 对小的 $|\mathrm{Re}A|$ 和 $1 < |\mathrm{Im}A| < c \approx 4.11$, (1) 的方程对适当的 ε 有两极限环,而在内极限环内有九个奇点.若 $|\mathrm{Im}A| > c$，只有一个环 (Нейштадт) 存在. 一个或两个极限环的区域间边界就好象长轴为 $1 \leqslant |\mathrm{Im}A| \leqslant 4.11$ 和短轴为 2 的椭圆一样.

(5) 证明广义 Lotka-Volterra 方程组 $\dot x = x(\alpha + ax + by)$, $\dot y = y(\beta + cx + dy)$ 没有极限环. 提示: 在失稳时,此方程组有一个初积分——三个线性函数之积 (Баутин).

参考文献

Abraham, R.; Marsden, J.

[1] Foundations of Mechanics, rev. ed. Benjamin-Cummings, 1978,

Андронов, А. А. (Andronov, A.A.)

[1] Application of Poincaré's theorem on "bifurcations points" and "change in stability" to simple auto-oscillatory systems, *C. R. Acad. Sci.* (Paris), **189**, 15 (1929), 559 -561.

Андронов, А.А. Леонтович-Андронова, Е. А. (Andronov, A. A.; Leontovic-Andronova, E.A.)

[1] Некоторые случаи зависимости периодических движений от параметров, *Уч. Зап. ГГУ*, **3**,(1939). вып. 6.

Андронов, А. А., Хайкин(Andronov, A.A.; Chaikin, C.E.)

[1] Теория колебания,2е изд, Гостехиздат, М., 1959. (英译本: Theory of Oscillation, Univ. Press, Princeton (1949)).

Аносов, Д.В.(Anosov, D. V.)

[1] Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколебающимися решениями, *Изв. АН СССР, сер. Матем.*, **24**, 5(1960), 721—742.

[3] Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, *Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова*, **90**(1967), 3—209

Арнольд, В. И. (Arnold, V.I.)

[1] О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона, *ДАН СССР*, **142**, 4 (1963), 758—761

[2] О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы, *ДАН СССР*, **156**, 1(1964):9 —12.

[3] Условие применимости и оценки погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы, *ДАН СССР*, **161**, 1(1965).

[4] Sur la geomerie differentielle des groupes de Lie de dimension infini et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, **16**, 1 (1966), 319 —361

[5] Замечания об особенностях конечной коразмерности в комплексных динамических системах, *Функ. Ана. и его Прил.*, **3**, 1 (1969), 1—6

[6] Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по ляпунову и проблемы топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений,. *Функ*

Ана. и его Прил., **4**, 3(1970), 1—9.

[7] Лекции о бифуркациях и версальных семействах, *УМН*, **27**, 5 (1972), 119—184.

[8] Обыкновенные Дифференциальные уравнения, Наука, М.(1974) (英译本: Ordinary Differential Equations, MIT Press, Cambridge, MA, (1978))

[9] Математичекие Методы Классической Механики, Наука, М, (1974) (英译本: Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, New York, (1978).)

[10] Особые точки гладких функций и их нормальные формы, *УМН*, **30**, 5(1975), 3—65.

[11] Бифуркации инвариантных многообразий дифференциальных уравнений и нормальные формы окрестностей эллиптических кривых, *Функ. Ана. и его Прил*, **10**, 4(1976), 1—12.

[12] Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонанса и версальные деформации эквивариантных векторных полей, *Функ. Ана. и его Прил.*, **11**, 2(1977), 1—10.

[13] Теория Катастроф, 2-е. изд.Изд. МГУ, М, (1983) (英译本) Catastrophe Theory, Springer Verlag, New York, (1984).)

Арнольд, В. И., Мешалкин, Л. Д. (Arnold, V.I.; Mechalkin, L. D)

[1] Семинар А. Н. Колмогорова по избранным вопросам анализа (1958/59г.) *УМН*, **15**,1 (1960), 247—250.

Арцимович, Л. А. (Arcimovich, L.A.)

[1] Управляемые Термоядерные Реакции, Физматгиз, М, (1961) de Baggis, H. F.

[1] Dynamical systems with stable structures, *Contr. Theory Nonlinear Oscillation* 2 37 59, Univ. Press, Princeton (1952).

[2] Грубые системы двух дифференциальных уравнений, *УМН*, **10**, 4(1955), 101 125

Белага, Э.Г. (Belaga, E.G.)

[1] О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности условно-периодического движения, *ДАН СССР*, **143**, 2 (1962), 255—258

Березовская, Ф. С., Хибник, А.И. (Beresovskaja, F.S.; Hibnik, A.I.)

[1] О бифуркациях сепаратрисс в задаче о потере устойчивости автоколебаний вблизи резонанса, *Прик. Матем. и Мех.* **44** (1980), 938—943.

Богданов, Р. И. (Bogdanov, R.I.)

[1] Бифуркация предельного цикла одного семейства векторных полей на плоскости, Тр. Сем. им И. Г. Петровского, 1976, вып. 2 23—36.

[2] Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел, ibid, 37—65

Bol, G.

[1] Über topologische Invarianten von zwei Kurvenscharer im Raum, *Abh. Math. Sem. Univ Hamburg*, **9**, 1(1932), 15—47.

Брюно, А. Д. (Brjuno, A.D.)

[1] Аналитическая форма дифференциальных уравнений, *Тр. ММО*, **25**(1971), 119—262.

[2] Нормальная форма дифференциальных уравнений с малым параметром, *Матем. заметки*, **16**, 3(1974) 407 -414.

[3] Аналитичекие инвариантные многообразия, *ДАН СССР*, **216**, 2 (1974), 253—256.

[4] Интегральные аналитические множества, *ДАН СССР*, **220**, 6 (1975), 1255—1258.

Брушлинская, Н. Н. (Brušlinskaja, N.N.)

[1] Qualitative integration of a system of n differential equations in a region containing a singular point and a limit cycle, ДАН СССР, **139**, 1(1961), 9—12.

[2] Теорема конечности для семейств векторных полей в окрестности особый точки типа Пуанкаре, *Функ. Ана. и его Прил*, **5**, 3(1971), 10—15.

Бунимович, Л. А. (Bynimovič, L.A.)

[1] О Биллиардах близких к рассеивающим, *Матем. Сб.*, **94**, 1(1974), 49 -73.

[2] On the ergodic properties of nowhere dense dispersing billiards, *Comm. Math. Phys.*, **65**(1979), 295—312.

Camacho, C., Kuiper, N.; Palis, J.

[1] La topologie du feuilletage d'un Champ de vecteurs holomorphes près d'un singularité, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **282**,(1976), 959—961.

Cartan, E.

[1] Sur les variétè a connexion projective, *Bull. Soc Math France*, **52** (1924), 205—241.

Casuga, T.

[1] On the adiabatic theorem for the Hamiltonian system of differential equations in the classical mechanics, I, II, III, *Proc Japan Acad.*, **37**, 7(1961)

Дыхне, А. М. (Dyhne, A.M.)

[1] Квантовые переходы в адиабатическом приближении, *ЖЭТФ*, **38**, 2(1960), 570 -578.

Ebin, D. G.; Marsden, J.

[1] Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, *Ann. of Math.*, **92**(1970), 102—163

П. М. Елизаров,

[1] Неалгебраичность некоторых многообразий ди-фференциальных уравнений. Вест Моск Унив Мат. Мех **2**(1978), 57—64.

Euler, L

[1] De seriebus divergenti bus, *Opera Omnica*, Ser. 1, **14**(1924), Leip-

pzig-Berlin, 247, 585—617.

Федорюк, М.В. (Fedorjuk, M.V.)

[1] Адиабатический инвариант систем линейных осциляторов и теория рассевания, *Дифф. Урав.*, **12**, 6(1976), 1012—1018.

Галин, Д. М. (Galin, D.M.)

[1] О вещественных матриц, зависящих от параметров, *УМН*, **27**, 1(1972),241—242.

[2] Версальная деформация линейны х гамильтоновы систем, *Тр. Сем. им И. Г. Петровского*, (1975), вып. 1, 63—74.

Гантмахер, Ф.Р. (Gantmacher, F.R.)

[1] Теория матриц, Наука, М, 1967 (中译本，柯召译：矩阵论，高等教育出版社 (1956).)

Golubitsky, M.; Guillemin, V

[1] Stable Mappings and Their Singularities, Springer- Verlag, New York, 1973

Горин, Е.А.(Gorin, E.A.)

[1] Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций, *УМН*, **16** 1(1961), 91—118.

Хазин, Л. Г.; Шноль, Э. Э. (Hazin, L.G.; Šnol', E.E.)

[1] О простейших случаях алгебраической неразрешимости в задаче асимптотической устойчивости *ДАН СССР*, **240** (1978), 1309—1311.

[2] Условия устойчивости равновесия при резонанса 1:3, *Прикл. Матем. и Мех.*, **44**(1980), 229—264.

Henon, M.

[1] A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Comm.Math. Phys.*, **50**(1976), 69—77.

Герценштеин, С. Я., Шмидт, В. М. (Hercenštein,C. Ja.; Schmidt, V. M.)

[1] Нелинейное развитие и взаимодействие возмущении конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя, *ДАН СССР*, **225**, 1(1975),59—62

Hirsch, M. W.; Pugh, C. C.; Shub, M.

[1] Invariant manifolds, *BAMS*, **76**, 5(1970),1015—1019.

Hirsch, M.; Smale, S.

[1] Differential Equatins, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, New York, 1974

Hopf, E.

[1] Abzweigung einer periodischen Lösungen von einer Stationären Lösung, Bereich. Sächs Leipzig, *Math. Phys. Kl.*, **94**, 19(1942), 15—25.

Хорозов, Э. И. (Horozov, E. I.)

[1] Versal deformations of equivariant vector fields for the cases of symmetry of order 2 and 3, *Тр. Сем. им. И. Г. Петрровского*, **5** (1979), 163—192,

Ильяшенко, Ю. С. (Il'jašenko, Ju. S.)

[1] Алгебраическая и почти алгебраическая неразрешимоть проблемы центр-фокус, *Функ. Ана. и его Прил.*, **6**, 3(1972), 30—37.

[2] О нулях специальных абелевых интегралов в вещественой области, *Функ. Ана и его Прил.*, **11**, 4 (1977), 78—79.

[3] Замечания о топологии особых точек дифференциальных уравнений в комплексной одласти и теорема ладиса, *Функ. Ана. и его Прил.*, **11**, 2(1977), 28—38.

[4] Multiplicity of limit cycles arising under perturbations of Hamiltonian equations $w' = P_2/Q_1$ in real and complex domains, *Тр. Сем. им И.Г. Петровского*, **3**(1978) 49—60.

Ильяшенко, Ю.С.; Пяртли, А.С. (Il'jašenko, Ju. S.; P'jartly, A.S.)

[1] Окрестность нулевого степени вложенного комплексного торя, *Тр. Сем. им И.Г. Петровского*, **5**(1979), 85—95; **7**(1981), 3—49; **8**(1982), 111—127.

Колмогоров, А. Н. (Kolmogorov. A. N)

[1] О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, *ДАН СССР*, **98**, 4(1954), 527—530.

Козякин, B.C. (Kozjakin, V.S.)

[1] Субфуркапия периодических колебаний, *ДАН СССР*, **232**, 1(1977) 25—27.

Ладис, Н.Н. (Ladis, N.N.)

[1] Топологические инварианты комплексных линейных потоков, *Дифф Урав.*, **12**, 12 (1976), 2159—2169.

Ландау, Л.Д. (Landau, L.D.)

[1] К продлеме турбуленности, *ДАН СССР*, **44**, 8(1944), 339—342.

Ландау, Л. Д.; Лифшиц, Е. М. (Landau, L. D.; Lifschiz, E.M.)

[1] Механика Сплошной Среды, Гостехиздат, М., 1954.

Lenard, A.

[1] Adiatatic invariance to all orders, *Ann. of Physics*, **6**(1959), 261—276.

Левантовский, Л. В. (Levantovski, L.V.)

[1] Об особенностях границы области устойчивости, *Вест. МГУ, Матем, и Мех.* (1980), вып. 6, 20—22.

[2] О границе множества устойчивых матриц, *УМН*, **35**, 2 (1980), 213—214.

McLaughlin, J. B.; Martin, P.C.

[1] Transition to turbulence of a statistically stressed fluid flow, *Phys. Rev. A.*, **12**(1975), 186—203.

Marsden, J.; McCracken, M.

[1] The Hopf Bifurcation and its Applications, Springer-Verlag, New York, 1976.

Mather, J.

[1] Anosov diffeomorphisms, *BAMS*, **73** (1967), 747—817.

Майер. А. Г. (Mayer, A.G.)

[1] Грубые преобразования окрестности в окрестности, *Уч. Зап. ГГУ*, **12** (1939),215—229.

Melnikov, V. K.

[1] Qualitative description of resonance phenomena in nonlinear systems, *Dubna, OIJaF*, P-1013 (1962),1—17.

Morozov, E. I.

[1] Bifurcations of a vector field near a singular point in the case of two pairs of imaginary eigenvalues, *CR de l'acad. Bulg. des Sci.*, **34**(1981), **35**(1982), 149—152.

Moser, J.

[1] A rapidly converging iteration method and nonlinear partial differential equations, I, *Ann Scuola Norm. Sup Pisa*.(3) **20**(1966), 265—316;II. *ibid*. **20**(1966), 499.

Нехорошев, Н.Н.(Nehoroshev, N.N.)

[1] О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым, *Функ. Ана. и его Прил.* **5**, 4(1971).

[2] Эспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, II, Труды Сем. им И. Г. Петровского, 5(1979), 5—50, *УМН*, **32**, 6(1977), 5—66.

[3] Устойчивая Оцепка сверх для гладких отображений и гладкий градиентов Функуий. Матем. Сб. 90 3(1973) 432—472.

Неймарк, Ю. И. (Neimark, Ju.I.)

[1] О некоторых случаях периодических движений зависящих от параметров *ДАН СССР*, **129** (1959), 736—739.

Нейштадт, А.И. (Neištadt, A.I.)

[1] О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче, *ДАН СССР*, **22**, 2(1975).

[2] О некоторых резонансных задач в нелинейных системах, *МГУ*, 1975.

[3] Об осреднении в многочастотных системах, II, *ДАН СССР*, **226**, 6(1976), 1295—1298.

[4] Бифуркации фазового портрета одной системы уравнений возникающей в задаче о потере устойчивости автоколебании вблизи резонанса 1:4, *Прик. Матем.и Мех.*, 42 (1978),830—840.

Newhouse, S.

[1] Nondensity of axiom A(a), Global Analysis, *Proc. Symp. Pure Math*, AMS, **14**(1971), 191—203.

Peixoto, M. M.

[1] Structural stability on two dimensional manifolds, *Topology*,**1**(1962), 101—120; **2**(1963), 179—180.

Peixoto, M. S.; Peixoto, M. M.

[1] Structural stability in the plane with enlarged boundary condition, *Anals Acad Brasileira*, Ciencias, **31**, 2 (1959) 135—160.

Пяртли, А. С. (P,jartli, A.S.)

[1] Диофантовы придлижения на подмногообразиях евклидова пространства, *Функ. Ана.* и его Прил., **3**, 4(1969), 59—62.

[2] Дождение комплексных инвариантных многообразиях вблизи особый точки векторного поля, зависящего от параметров, *Функ. Ана. и* его *Прил.*, **6**, 4(1972), 95—96.

[3] Циклы системы двух комплексных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. *Тр. Моск. Матем. Общ.*, **37** (1978), 95—106.

Плисс, В. А. (Pliss, V.A.)

[1] О грубости дифференциальных уравнений заданных на торе, *Вестник ЛГУ, сер. Матем.*, **13**, 3(1960)15—23.

[2] Принцип сведения в теории устойчивости движения, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **28**,6(1964),1297—1324.

Плыкин, Р. В. (Plykin, R.V.)

[1] Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей, *Матем. сбор.*, **94**, 2(1974), 243—264.

Ратнер, М. Е. (Ratner, M.E.)

[1] Центральная продельная теорема для У-потоков на трёхмерных многообразиях, *ДАН СССР*, **186**, 3(1969), 519—521.

Ruelle, D.; Takens, F.

[1] On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.*, **20** (1971),167—192; **23**(1971).

Rüssmann, H.

[1] Bemerkungen zur Newtonschen Methode, *Nachr, Acad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse*, **1**(1972), 1—10.

Sacker, R. J.

[1] On invariant surfaces and bifurcations of periodic solutions of ordinary differential equations, *New York Univ. Report, IMM NYU*, **333** (1964), *Comm. Pure and Appl. Math.*, **18**, 4(1965),717—732.

Seidenberg, A.

[1] A new decision method for elementary algebra, *Ann. of Math.*,**60** (1954),356—374

Siegel, C. L.

[1] Note on differential equations on the torus, *Ann. of Math.*, **46** 3(1945), 423—428.

Синай. Я. Г. (Sinai, Ja. G.)

[1] Центральная предельная теорема для геодезических потоков на многообразиях постоянной отрицательной кривизны, *ДАН СССР*, **133**, 6(1960), 1303—1306.

[2] Динамические системы с упругими отражениями, эргодические свойства рассевающих биллиаров, *УМН*, **25**, 2(1970), 141—192.

Слуцкин, А. А. (Slydskin, A.A.)

[1] О движении одномерного нелинейного осцилятора в адиабатических условиях, *ЖЭТФ*, **45**, 4(1963), 978—988.

Шошитайшвили, А.Н. (Šošitaišvili, A.N.)

[1] О бифуркациях топологического типа особых точек векторных полей зависящих от параметров, *Функ. Ана. и его Прил.* **6**, 2 (1972), 97—98.

[2] Бифуркации топологического типа векторного поля вблизи особой точки, *Тр. Сем. им И. Г. Петровского*, 1(1975) 279—309.

Спринджук, В.Г. (Sprindžuk, V.G.)

[1] Продлема Малера в метрической Теории чисел. минск, 1977.

Sternberg, S.

[1] On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space, *Amer. J. Math.*, **80**, 3(1958), 623—631; **81**, 3(1959), 578—604.

Takens, F.

[1] A nonstabilisable jet of a singularity of a vector field, Dynamical System (ed. M.M. Peixoto), Acad. Press, New York (1973), 583—597.

Тихонова, Э. А. (Tikhonova, E.A.)

[1] Аналогия и гомеоморфизм возмущенной и невозмущенной систем с блочно-треугольной матрицей, *Дифф. Урав.*, **6**, 7(1970).1221—1229

Tresse, A.

[1] Sur les invariants differenciels des groupes continues des transformation, *Acta Math.*, **18**(1894), 1—88.

Варченко, А.Н. (Varchenko, A.H.)

[1] Локальное топологические свойства дифференциальных отображений, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **38**, 5(1974), 1037—1090.

Васильев, В.А. (Vasiliev, V. A.)

[1] Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума, *Функ Ана. и его Прил.*, **11**, 3 (1977), 1—11.

Вишик, С.М. (Vishik, S.M.)

[1] О задаче с косой производной, *Вестник МГУ матем.*, 1(1972), 21—28.

Wan, A.H.

[1] Bifurcations into invariant tori at points of resonances, *Arch. Rat. Mech.* and *Anal.*, **68**(1978) 343—357.

Wells, R. O.

[1] Differential Calculus on Complex Manifolds, New York, Springer-Verlag, 1980.

Weyl, H.

[1] Mean motion, *Amer. J. of Math.*, **60**(1938) 889—896; **61**(1939), 143—148.